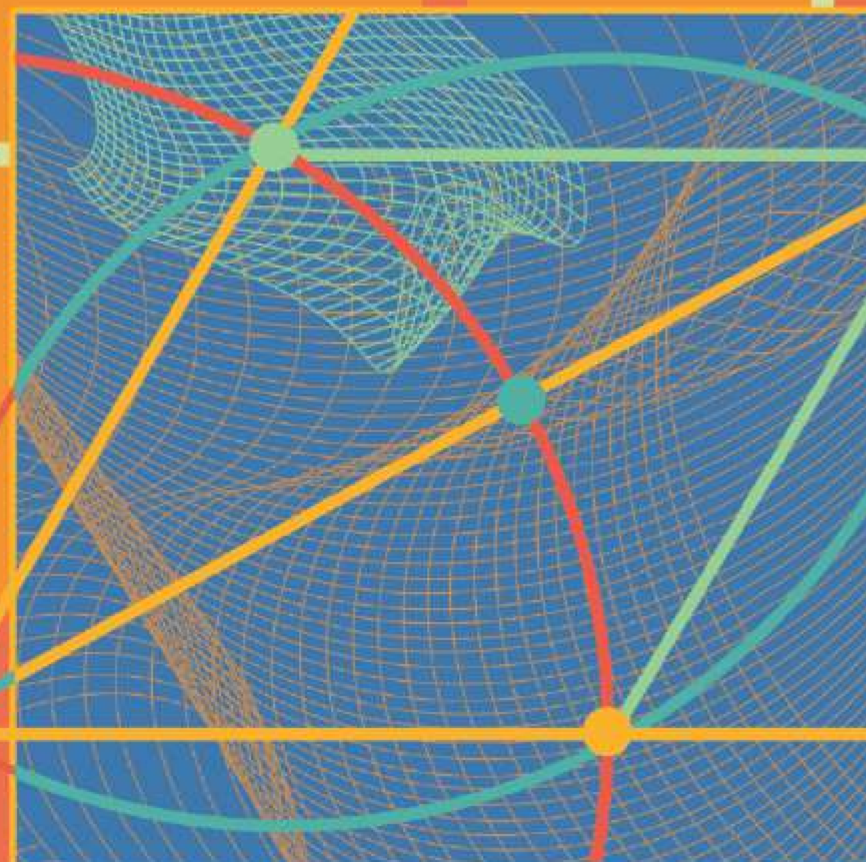
Геометрия



А. Г. Мерзляк
В. М. Поляков

7

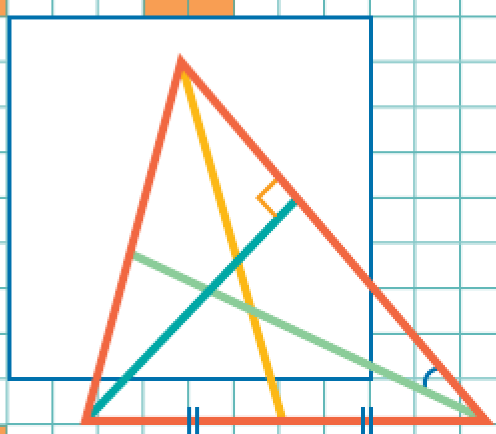
вентана граф

российский учебник

А. Г. Мерзляк
В. М. Поляков

ГЕОМЕТРИЯ

7 класс



Учебник

Под редакцией В. Е. Подольского

2-е издание, исправленное

Рекомендовано
Министерством просвещения
Российской Федерации

Москва
Издательский центр
«Вентана-Граф»
2019

От авторов

Дорогие семиклассники!

Вы сделали серьёзный шаг в своей жизни: решили продолжать образование в классе с углублённым изучением математики. Мы поздравляем вас с этим выбором и надеемся, что вы не разочаруетесь в своём решении.

Учиться в математическом классе непросто. Надо быть настойчивым и увлечённым, внимательным и аккуратным, при этом самое главное — не быть безразличным к математике, а любить эту красивую науку.

Вы начинаете изучать новый школьный предмет — **геометрию**. Обратите внимание, что в словах «география» и «геометрия» одинаковая часть — «гео», что в переводе с греческого означает «земля». Но если на уроках географии в 6 классе вы действительно занимались землеописанием («графия» — по-гречески «описание»), то на уроках геометрии вам не придётся заниматься землемерием («метрео» — по-гречески «мерить»).

Геометрия — одна из самых древних наук. Её название можно объяснить тем, что зарождение и развитие геометрии было тесно связано с разнообразной практической деятельностью человека: разметкой границ земельных участков, строительством дорог, оросительных каналов, зданий и других сооружений, т. е. геометрия, как говорят в таких случаях, была *прикладной наукой*. Постепенно, шаг за шагом человечество накапливало знания, и геометрия превратилась в красивую и совершенную, строгую и последовательную математическую теорию. Знакомиться с этой наукой и учиться применять полученные знания на практике вы и будете на уроках геометрии.

Знать геометрию чрезвычайно важно. Действительно, посмотрите вокруг — везде геометрия, точнее, предметы, имеющие форму таких **геометрических фигур**, как треугольник, прямоугольник, круг, прямоугольный параллелепипед, шар и т. п.

Без глубоких геометрических знаний не могли появиться сложные строительные конструкции (рис. 1, 2), корабли (рис. 3), самолёты и даже детали детского конструктора и узоры вышивок (рис. 4). Создание узоров требует от мастерицы знаний о таких геометрических понятиях, как симметрия и параллельный перенос. Не зная геометрии, невозможно стать хорошим инженером-конструктором, токарем, столяром, учёным, архитектором, дизайнером, модельером, специалистом в области компьютерной графики и т. д. Вообще, геометрические знания — важнейшая составляющая человеческой культуры.

Рис. 1

Рис. 2

Рис. 3

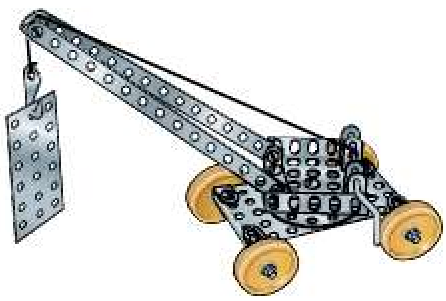


Рис. 4

Геометрия — очень интересный предмет. Мы надеемся, что вы в этом скоро убедитесь, и поможет этому учебник, который вы держите в руках. Познакомьтесь с его структурой.

Учебник разделён на четыре главы, каждая из которых состоит из параграфов. В них изложен теоретический материал, при изучении которого особое внимание обращайте на текст, напечатанный **жирным шрифтом**, ***жирным курсивом*** и *курсивом*; так в книге выделены определения, правила и важнейшие математические утверждения.

Как правило, изложение теоретического материала завершается примерами решения задач. Эти записи можно рассматривать как один из возможных образцов оформления решения.

К каждому параграфу подобраны задачи для самостоятельного решения, к которым мы советуем приступать только после усвоения теоретического материала. Среди заданий есть как простые и средние по сложности упражнения, так и трудные задачи.

Кроме того, в учебнике вы сможете прочитать рассказы по истории геометрии.

Дерзайте! Желаем успеха!

Условные обозначения

◆ Простые задачи

◆◆ Задачи среднего уровня сложности

◆◆◆ Сложные задачи

Задачи высокой сложности

Ключевые задачи, результат которых можно использовать при решении других задач

Окончание доказательства теоремы

Окончание доказательства следствия

Окончание решения задачи

4.9. Задания, рекомендуемые для устной работы

4.10. Задания, рекомендуемые для домашней работы

Что изучает геометрия?

Геометрия — новый для вас учебный предмет. Однако на уроках математики вы уже знакомились с азами этой мудрой науки. Так, все геометрические фигуры, изображённые на рисунке 5, вам хорошо известны.

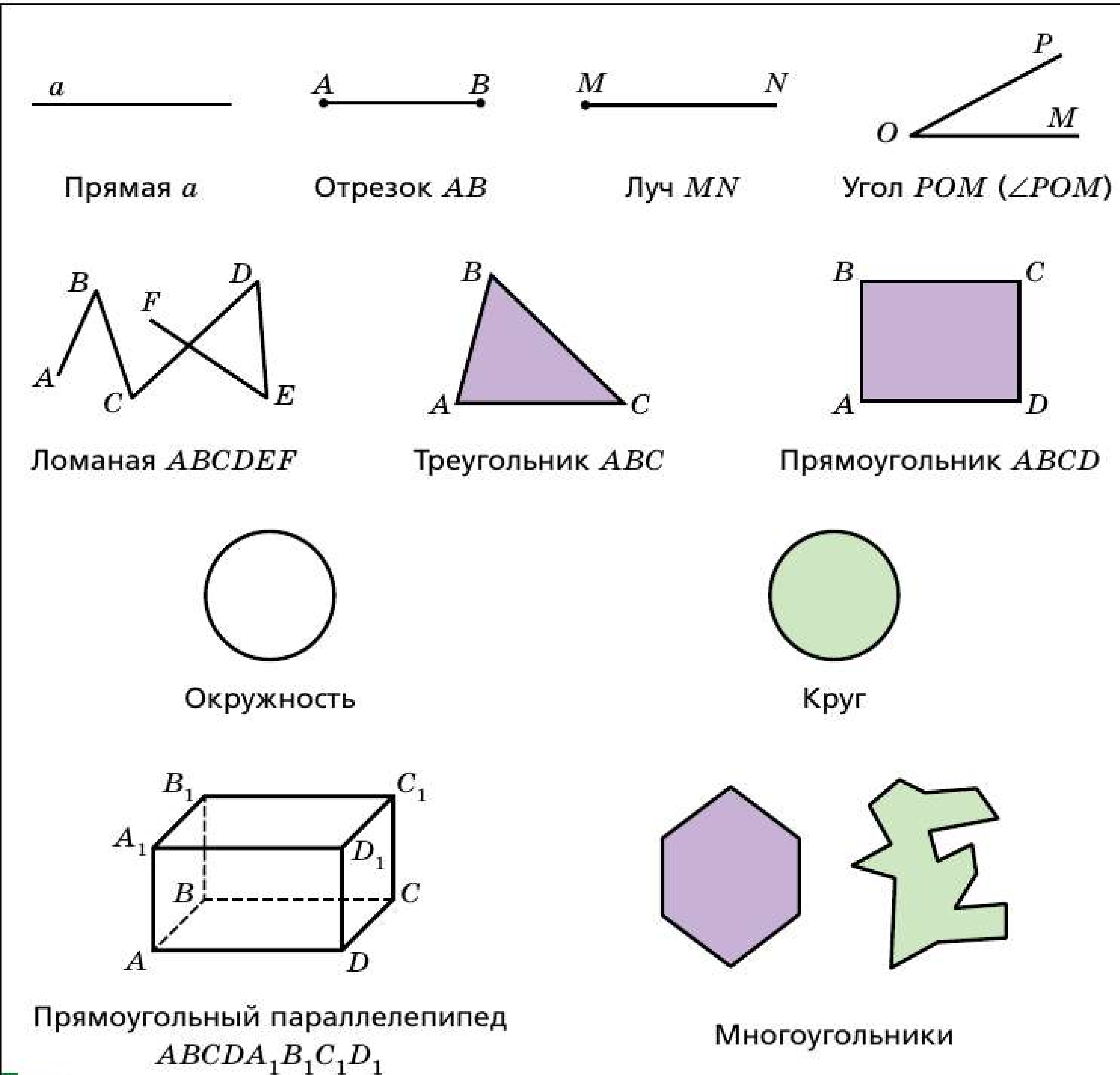


Рис. 5

Вы умеете с помощью линейки соединять две точки отрезком (рис. 6), с помощью циркуля строить окружность (рис. 7), с помощью линейки и угольника проводить перпендикулярные и параллельные прямые (рис. 8), измерять длину отрезка и строить отрезок заданной

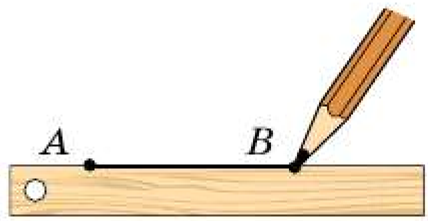


Рис. **6**

Рис. **7**

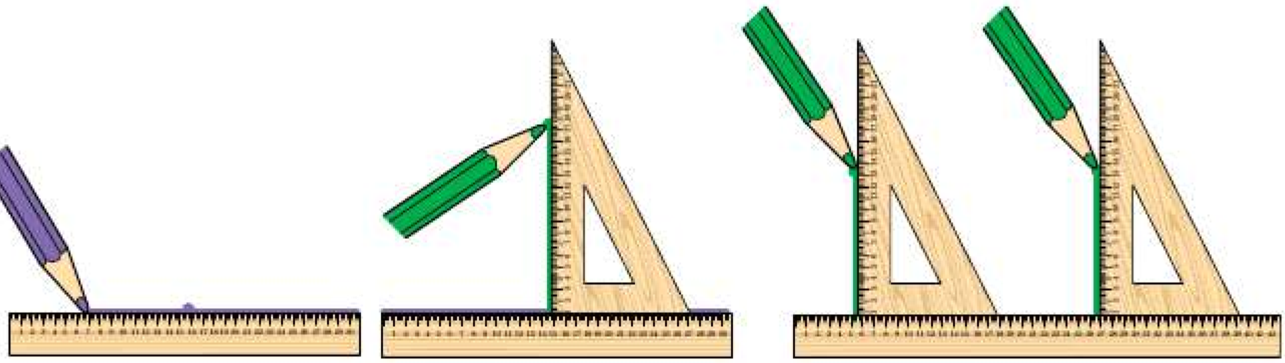


Рис. **8**

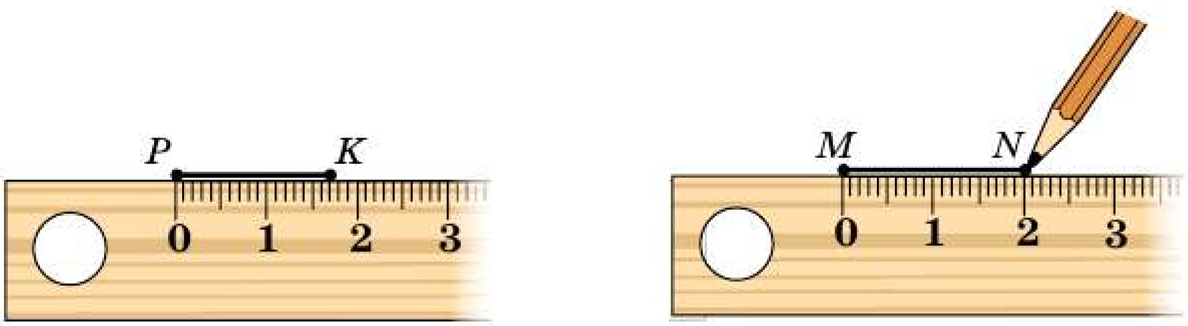


Рис. **9**

длины с помощью линейки с миллиметровыми делениями (рис. 9), находить величину угла и строить угол заданной величины с помощью транспортира (рис. 10), классифицировать треугольники.

Однако знать, как «выглядит» фигура, или уметь выполнять простейшие построения — это всего лишь самые начальные знания *науки о свойствах геометрических фигур*, т. е. *геометрии*.

При изучении *систематического курса* геометрии вы будете постепенно в определённой последовательности изучать свойства геометрических фигур, а следовательно, и сами фигуры, как знакомые вам,

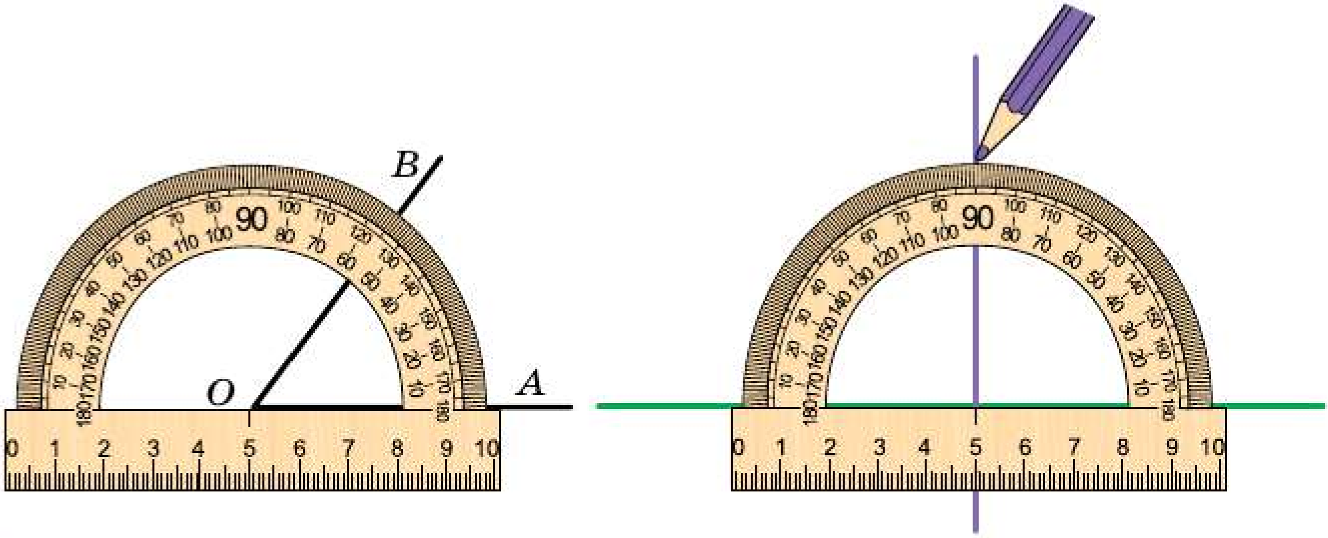


Рис. **10**

так и новые. Это означает, что вы должны научиться, используя одни свойства фигуры, находить, а главное, **доказывать** другие её свойства.

Многие знакомые вам реальные предметы или объекты имеют форму известных геометрических фигур, или, как ещё принято говорить, являются **моделями** геометрических фигур. Мы часто говорим: «лист бумаги имеет форму прямоугольника, футбольный мяч имеет форму шара, кирпич имеет форму прямоугольного параллелепипеда» и т. п. След, оставленный на бумаге остро заточенным карандашом, даёт представление о точке; поверхность водоёма в безветренную погоду может служить моделью плоскости.

Таким образом, *изучая геометрию, мы познаём окружающий нас мир*[1].

Школьный курс геометрии традиционно делится на **планиметрию** и **стереометрию**. Планиметрия изучает фигуры на плоскости («планум» в переводе с латинского — «плоскость»), стереометрия — фигуры в пространстве («стереос» в переводе с греческого — «пространственный»).

Итак, мы приступаем к изучению планиметрии.

[1] Лучше понять, каким эффективным инструментом познания является геометрия, вы сможете, если примете участие в проекте «Геометрия вокруг нас» (см. с. 190).

глава

1 Простейшие геометрические фигуры и их свойства

- В этой главе рассматриваются знакомые вам из курса математики предыдущих классов геометрические фигуры: точки, прямые, отрезки, лучи и углы.
- Вы узнаете больше о свойствах этих фигур. Некоторые из этих свойств научитесь **доказывать**. Слова **определение**, **теорема**, **аксиома** станут для вас привычными, понятными и часто употребляемыми.

§ 1 Точки и прямые

Точка — самая простая геометрическая фигура. Это единственная фигура, которую нельзя разбить на части. Например, каждая из фигур, изображённых на рисунке 1.1, разбита на части. И даже о фигуре, изображённой на рисунке 1.2, которая состоит из двух точек, можно сказать, что она состоит из двух частей: точки A и точки B.

На рисунке 1.3 изображены прямая a и две точки A и B. Говорят, что *точка A принадлежит прямой a*, или *точка A лежит на прямой a*, или *прямая a проходит через точку A* и, соответственно, *точка B не принадлежит прямой a*, или *точка B не лежит на прямой a*, или *прямая a не проходит через точку B*.

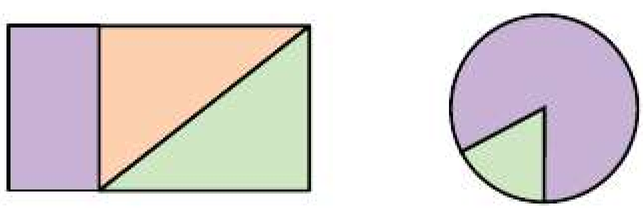


Рис. 1.1

Рис. 1.2

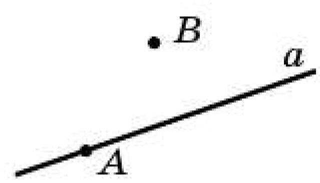


Рис. 1.3

Прямая — это геометрическая фигура, обладающая определёнными свойствами.

Основное свойство прямой

Через любые две точки[1] можно провести прямую, и притом только одну.

---

[1] Здесь и в дальнейшем, говоря «две точки», «три точки», «две прямые» и т. д., будем подразумевать, что это разные точки и разные прямые. Случай их совпадения будем оговаривать особо.

Почему это свойство прямой считают основным?

Пусть о некоторой линии известно лишь то, что она проходит через точки A и B. Для того чтобы составить представление об этой фигуре, такой информации явно недостаточно. Действительно, ведь через точки A и B можно провести много различных линий (рис. 1.4). Прямая же задаётся этими точками однозначно. В этом и состоит суть основного свойства прямой.

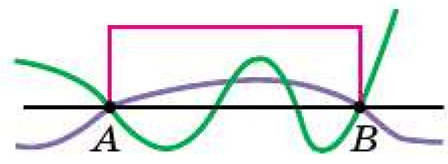


Рис. 1.4

Это свойство позволяет обозначать прямую, называя две любые её точки. Так, прямую, проходящую через точки M и N, называют «прямая MN» (или «прямая NM»).

Основное свойство геометрической фигуры ещё называют **аксиомой** (подробнее об аксиомах вы узнаете в § 6).

Если надо разъяснить смысл какого-либо понятия (термина), то используют **определения**. Например:

1) часами называют прибор для измерения времени;

2) геометрия — это раздел математики, изучающий свойства фигур.

Определения есть и в геометрии.

Определение

Две прямые, имеющие общую точку, называют пересекающимися.

На рисунке 1.5 изображены прямые a и b, пересекающиеся в точке O.

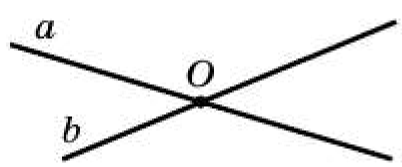


Рис. 1.5

Часто справедливость (истинность) какого-либо факта устанавливают с помощью *логических рассуждений*.

Рассмотрим следующую задачу. Известно, что все жители Геометрической улицы — математики. Женя живёт по адресу ул. Геометрическая, 5. Является ли Женя математиком?

По условию задачи Женя живёт на Геометрической улице. А поскольку все жители этой улицы математики, то Женя — математик.

Приведённые логические рассуждения называют **доказательством** того факта, что Женя — математик.

В математике утверждение, истинность которого устанавливают с помощью доказательства, называют **теоремой**.

Теорема 1.1

Любые две пересекающиеся прямые имеют только одну общую точку.

Доказательство

Пусть пересекающиеся прямые a и b, кроме общей точки A, имеют ещё одну общую точку B (рис. 1.6). Тогда через две точки A и B проходят две прямые. А это противоречит основному свойству прямой. Следовательно, предположение о существовании второй точки пересечения прямых a и b неверно. ■

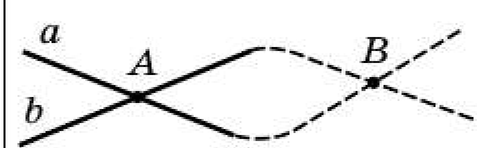


Рис. **1.6**

1. Какую фигуру нельзя разбить на части?
2. Сформулируйте основное свойство прямой.
3. Какое свойство прямой позволяет обозначать её, называя любые две точки прямой?
4. Для чего используют определения?
5. Какие две прямые называют пересекающимися?
6. Как называют утверждение, истинность которого устанавливают с помощью доказательства?
7. Сформулируйте теорему о двух пересекающихся прямых.

Практические задания

1.1. Проведите прямую, обозначьте её буквой m. Отметьте точки A и B, лежащие на этой прямой, и точки C, D, E, не лежащие на ней.

1.2. Отметьте точки M и K и проведите через них прямую. Отметьте на этой прямой точку E. Запишите все возможные обозначения полученной прямой.

1.3. Проведите прямые a и b так, чтобы они пересекались. Обозначьте точку их пересечения буквой C. Принадлежит ли точка C прямой a? Прямой b?

1.4. Отметьте три точки так, чтобы они не лежали на одной прямой, и через каждую пару точек проведите прямую. Сколько образовалось прямых?

1.5. Правильность изготовления линейки можно проверить так. Через две точки с помощью линейки провести линию. Затем линейку перевернуть и через эти же точки вдоль того же края линейки вновь провести ещё одну линию. Если линии совпадут, то линейка изготовлена правильно. Объясните почему.

1.6. Проведите три прямые так, чтобы каждые две из них пересекались. Отметьте точки пересечения этих прямых. Сколько можно получить точек пересечения?

1.7. Отметьте четыре точки так, чтобы при проведении прямой через каждые две из них: 1) образовалась одна прямая; 2) образовалось четыре прямых; 3) образовалось шесть прямых. Проведите эти прямые.

Упражнения

1.8. Пользуясь рисунком 1.7:

1) укажите все отмеченные точки, принадлежащие прямой a; прямой MK;

2) укажите все отмеченные точки, не принадлежащие прямой a; прямой MK;

3) определите, пересекаются ли прямые a и MK;

4) укажите все отмеченные точки, принадлежащие прямой a, но не принадлежащие прямой MK.

1.9. Пользуясь рисунком 1.8, укажите:

1) какие из отмеченных точек принадлежат прямой p, а какие не принадлежат ей;

2) каким прямым принадлежит точка A; точка B; точка C; точка D; точка E;

3) какие прямые проходят через точку C; точку B; точку A;

4) в какой точке пересекаются прямые k и p; прямые m и k;

5) в какой точке пересекаются три из четырёх изображённых на рисунке прямых.

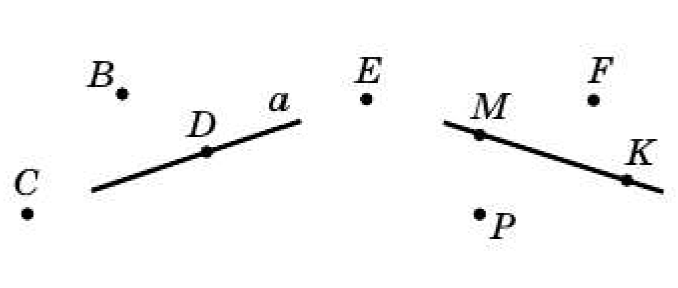


Рис. 1.7

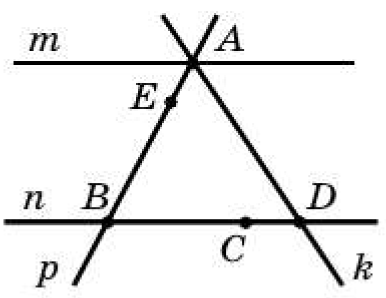


Рис. 1.8

1.10. Точка C принадлежит прямой AB. Являются ли различными прямые AB и AC? Ответ обоснуйте.

1.11. Провели четыре прямые, каждые две из которых пересекаются, причём через каждую точку пересечения проходят только две прямые. Сколько точек пересечения при этом образовалось?

1.12. Как надо расположить шесть точек, чтобы они определяли шесть прямых?

1.13. Данную прямую пересекают четыре прямые. Сколько может образоваться точек пересечения этих прямых с данной?

1.14. Провели четыре прямые, каждые две из которых пересекаются. Сколько точек пересечения может образоваться?

1.15. Провели пять прямых, каждые две из которых пересекаются. Каково наименьшее возможное количество точек пересечения этих прямых? Какое наибольшее количество точек пересечения может образоваться?

1.16. Можно ли провести шесть прямых и отметить на них 11 точек так, чтобы на каждой прямой было отмечено ровно четыре точки?

1.17. На плоскости проведены три прямые. На первой прямой отметили пять точек, на второй — семь точек, а на третьей — три точки. Каким может быть наименьшее количество отмеченных точек?

1.18. Можно ли отметить несколько точек и провести несколько прямых так, чтобы на каждой прямой лежали ровно три отмеченные точки и через каждую точку проходили ровно три из проведённых прямых?

1.19. Даны n прямых. Известно, что имеется пять точек, каждая из которых принадлежит хотя бы двум из данных прямых. Найдите наименьшее значение n.

1.20. На плоскости даны 10 точек. Известно, что из любых четырёх точек можно исключить одну так, что оставшиеся три точки лежат на одной прямой. Докажите, что девять из данных точек лежат на одной прямой.

§ 2 Отрезок и его длина

На рисунке 2.1 изображена прямая a, проходящая через точки A и B. Эти точки ограничивают часть прямой a, выделенную синим цветом. Такую часть прямой вместе с точками A и B называют **отрезком**, а точки A и B — **концами** этого отрезка.

Рис. 2.1

Для любых двух точек M и N существует *единственный* отрезок, для которого эти точки являются концами (рис. 2.2), т. е. *отрезок своими концами задаётся однозначно*. Поэтому отрезок обозначают, называя его концы. Например, отрезок, изображённый на рисунке 2.2, обозначают так: MN или NM (читают: «отрезок MN» или «отрезок NM»).

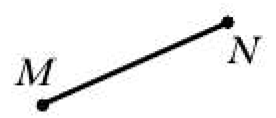


Рис. 2.2

На рисунке 2.3 изображены отрезок AB и точка X, принадлежащая этому отрезку, но не совпадающая ни с одним из его концов. Точку X называют **внутренней точкой** отрезка AB. В этом случае также говорят, что точка X **лежит между точками** A и B.

Рис. 2.3

Таким образом, отрезок AB состоит из точек A и B, а также всех точек прямой AB, лежащих между точками A и B.

Определение

Два отрезка называют равными, если их можно совместить наложением.

На рисунке 2.4 изображены равные отрезки AB и CD. Пишут: $AB = CD$.

Вы знаете, что каждый отрезок имеет определённую длину, и для её измерения надо выбрать **единичный отрезок**. В качестве единичного можно выбрать любой отрезок.

Например, будем считать единичным отрезок MN на рисунке 2.5. Этот факт записывают так: $MN = 1$ ед. Тогда длину отрезка AB считают равной трём **единицам длины** и записывают $AB = 3$ ед. Также

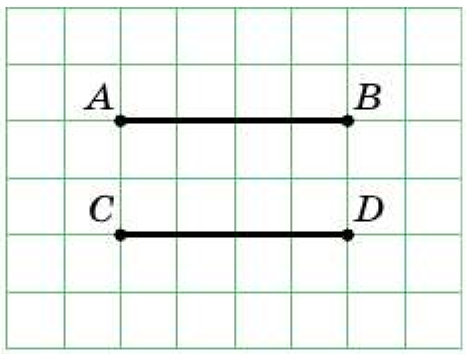


Рис. 2.4

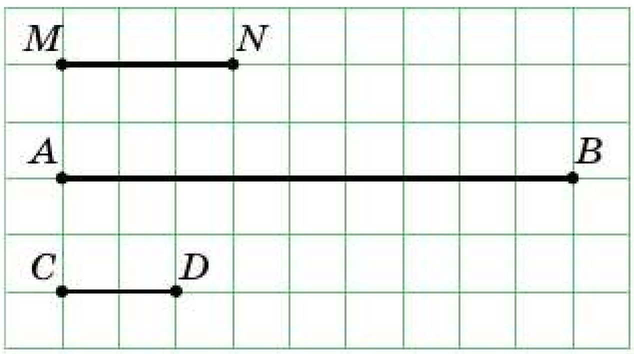


Рис. 2.5

принята запись $AB = 3$, её читают: «отрезок AB равен трём». Для отрезка CD имеем: $CD = \frac{2}{3}$.

На практике чаще всего используют такие единичные отрезки: 1 мм, 1 см, 1 дм, 1 м, 1 км.

В зависимости от выбора единицы длины меняется **числовое значение длины** отрезка. Например, на рисунке 2.6 имеем: $AB = 17$ мм, или $AB = 1{,}7$ см, или $AB = 0{,}17$ дм и т. д.

Рис. 2.6

На производстве и в быту используют различные приборы для измерения длины отрезка: линейку с делениями, рулетку, штангенциркуль, микрометр, полевой циркуль (рис. 2.7).

Рис. 2.7

Равные отрезки имеют равные длины, и наоборот, *если длины отрезков равны, то равны и сами отрезки*.

Если длина отрезка AB больше длины отрезка MN, как, например, на рисунке 2.5, то говорят, что отрезок AB больше отрезка MN, и записывают: $AB > MN$. Также можно сказать, что отрезок MN меньше отрезка AB, и записать: $MN < AB$.

В дальнейшем, говоря «сумма отрезков», будем подразумевать сумму длин этих отрезков.

Основное свойство длины отрезка

Если точка C является внутренней точкой отрезка AB, то отрезок AB равен сумме отрезков AC и CB, т. е.

$$AB = AC + CB \text{ (рис. 2.8).}$$

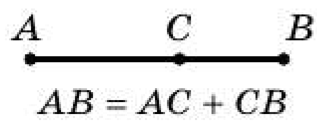


Рис. 2.8

Определение

Расстоянием между точками A и B называют длину отрезка AB. Если точки A и B совпадают, то расстояние между ними считают равным нулю.

Определение

Серединой отрезка AB называют такую его точку C, что $AC = CB$.

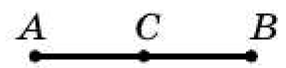


Рис. 2.9

На рисунке 2.9 точка C — середина отрезка AB.

Задача. Точки A, B и C принадлежат одной прямой, $AB = 8$ см, отрезок AC на 2 см длиннее отрезка BC. Найдите отрезки[1] AC и BC.

Решение. В условии не указано, каково взаимное расположение данных точек на прямой. Поэтому рассмотрим три возможных случая.

1) Точка B — внутренняя точка отрезка AC (рис. 2.10). Тогда отрезок AC больше отрезка BC на длину отрезка AB, т. е. на 8 см. Это противоречит условию. Следовательно, такой случай невозможен.

2) Точка C — внутренняя точка отрезка AB (рис. 2.11). В этом случае $AC + CB = AB$. Пусть $CB = x$ см, тогда $AC = (x + 2)$ см. Имеем:

$$x + 2 + x = 8;$$
$$x = 3.$$

Следовательно, $BC = 3$ см, $AC = 5$ см.

Рис. 2.10

Рис. 2.11

Рис. 2.12

[1] Часто вместо «Найдите длину отрезка...» говорят: «Найдите отрезок...».

3) Точка A — внутренняя точка отрезка BC (рис. 2.12). В этом случае $AB + AC = BC$ и тогда $AC < BC$. Это противоречит условию. Следовательно, такой случай невозможен.

Ответ: $AC = 5$ см, $BC = 3$ см. ■

1. Сколько существует отрезков, концами которых являются две данные точки?
2. Какие два отрезка называют равными?
3. Можно ли любой отрезок выбрать в качестве единичного?
4. Что можно сказать о длинах равных отрезков?
5. Что можно сказать об отрезках, имеющих равные длины?
6. Сформулируйте основное свойство длины отрезка.
7. Что называют расстоянием между двумя точками?
8. Чему равно расстояние между двумя совпадающими точками?

Практические задания

2.1. Отметьте две точки A и B и проведите через них прямую. Отметьте точки C, D и E, принадлежащие отрезку AB, и точки F, M и K, которые не принадлежат отрезку AB, но принадлежат прямой AB.

2.2. Проведите прямую и отметьте на ней три точки. Сколько образовалось отрезков?

2.3. Отметьте на прямой точки A, B, C и D так, чтобы точка C лежала между точками A и B, а точка D — между точками B и C.

2.4. Отметьте на прямой точки A, B и C так, чтобы выполнялось равенство $AC = AB + BC$.

2.5. Сравните на глаз отрезки AB и CD (рис. 2.13). Проверьте свой вывод измерением.

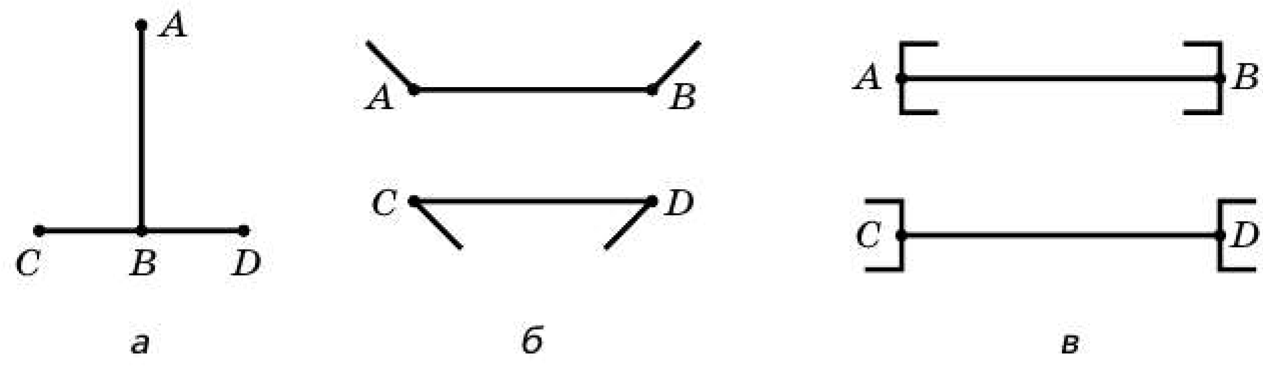


Рис. 2.13

2.6. Сравните на глаз отрезки AB и BC (рис. 2.14). Проверьте свой вывод измерением.

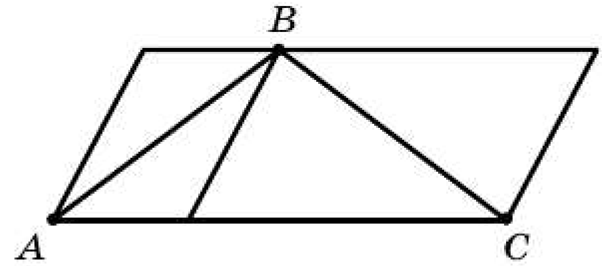


Рис. **2.14**

Упражнения

2.7. Назовите все отрезки, изображённые на рисунке 2.15.

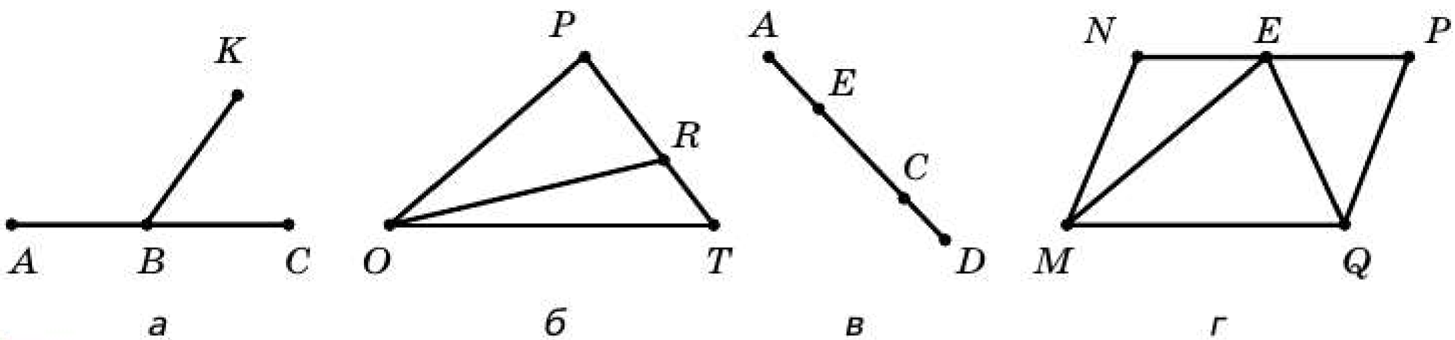


Рис. **2.15**

2.8. Найдите длину каждого из отрезков, изображённых на рисунке 2.16, если единичный отрезок равен отрезку: 1) AB; 2) MN.

2.9. Какая из точек, отмеченных на рисунке 2.17, лежит между двумя другими? Запишите соответствующее равенство, следующее из основного свойства длины отрезка.

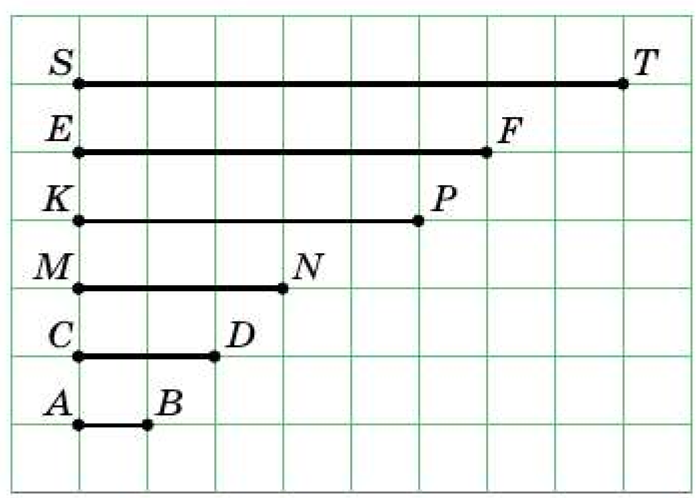


Рис. **2.16**

2.10. Между какими точками лежит точка B (рис. 2.18)? Для каждого случая запишите соответствующее равенство, следующее из основного свойства длины отрезка.

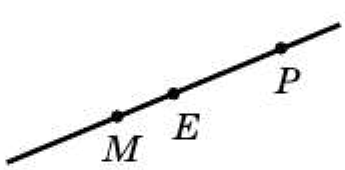


Рис. **2.17**

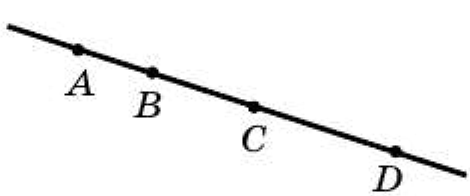


Рис. **2.18**

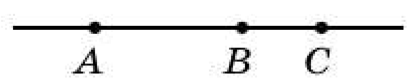


Рис. **2.19**

2.11. Точка D — внутренняя точка отрезка ME. Найдите:
1) расстояние между точками M и E, если $MD = 1{,}8$ дм, $DE = 2{,}6$ дм;
2) отрезок MD, если $ME = 42$ мм, $DE = 1{,}5$ см.

2.12. Точки A, B и C лежат на одной прямой (рис. 2.19). Какие из следующих утверждений верны:
1) $AB + BC = AC$;
2) $AC + AB = BC$?

2.13. Точка K является серединой отрезка MN. Можно ли совместить наложением: 1) отрезки MK и KN; 2) отрезки MK и MN?

2.14. Точка K — середина отрезка MN, точка E — середина отрезка KN, $EN = 5$ см. Найдите отрезки MK, ME и MN.

2.15. Точка C — внутренняя точка отрезка AB, длина которого равна 20 см. Найдите отрезки AC и BC, если:
1) отрезок AC на 5 см больше отрезка BC;
2) отрезок AC в 4 раза меньше отрезка BC;
3) $AC : BC = 9 : 11$.

2.16. Точка K принадлежит отрезку CD, длина которого равна 28 см. Найдите отрезки CK и KD, если:
1) отрезок CK на 4 см меньше отрезка KD;
2) отрезок CK в 6 раз больше отрезка KD;
3) $CK : KD = 3 : 4$.

2.17. Отрезки AB и CD равны (рис. 2.20). Докажите, что отрезки AC и BD также равны.

2.18. Отрезки ME и FN равны (рис. 2.21). Докажите, что $MF = EN$.

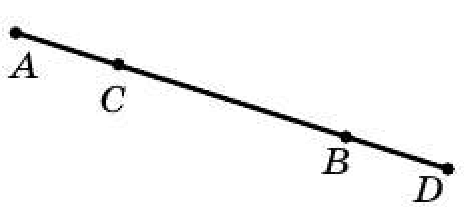


Рис. 2.20

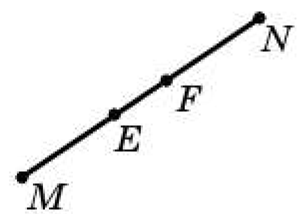


Рис. 2.21

2.19. Точка C делит отрезок AB, длина которого равна a, на два отрезка. Найдите расстояние между серединами отрезков AC и BC.

2.20. Точки A, B и C лежат на одной прямой. Найдите отрезок BC, если $AB = 24$ см, $AC = 32$ см. Сколько решений имеет задача?

2.21. На прямой отмечены точки A, B и C так, что $AB = 15$ см, $AC = 9$ см. Найдите расстояние между серединами отрезков AB и AC.

2.22. Отрезок EF равен 12 см. Найдите на прямой EF все точки, сумма расстояний от каждой из которых до концов отрезка EF равна: 1) 12 см; 2) 15 см; 3) 10 см.

2.23. Через точки A и B проведена прямая. Где на этой прямой лежит точка C, расстояние от которой до точки B в 2 раза больше расстояния от неё до точки A?

2.24. Отрезок, длина которого равна 32 см, разделили на три неравных отрезка. Расстояние между серединами крайних отрезков равно 18 см. Найдите длину среднего отрезка.

2.25. На прямой последовательно отметили точки A, B, C, D и E так, что $AB = 15$ см, $CE = 45$ см, $AC = BD$. Найдите отрезок DE.

2.26. На прямой отмечены точки A, B, C и D так, что $AB = 8$ см, $BC = 30$ см, $CD = 12$ см, $DA = 10$ см. Найдите отрезок AC.

2.27. Можно ли на прямой отметить точки A, B, C, D и E так, чтобы расстояния между ними оказались равными: $AB = 4$ см, $BC = 7$ см, $CD = 9$ см, $DE = 6$ см, $AE = 8$ см?

2.28. Можно ли на прямой отметить точки A, B, C, D и E так, чтобы расстояния между ними оказались равными: $AB = 6$ см, $BC = 7$ см, $CD = 10$ см, $DE = 9$ см, $AE = 12$ см?

2.29. Точка B принадлежит отрезку AC. Известно, что $AB = 2$ см, $BC = 1$ см. На прямой AB укажите все точки M такие, что $AM + MB = MC$.

2.30. На прямой последовательно отметили точки A, B, C и D так, что расстояние между любыми двумя соседними точками равно 1 см. На данной прямой найдите все такие точки X, чтобы сумма $XA + XB + XC + XD$ принимала наименьшее значение.

2.31. Какое наименьшее количество внутренних точек надо отметить на отрезках, изображённых на рисунке 2.22, чтобы на каждом из них было отмечено по две внутренние точки?

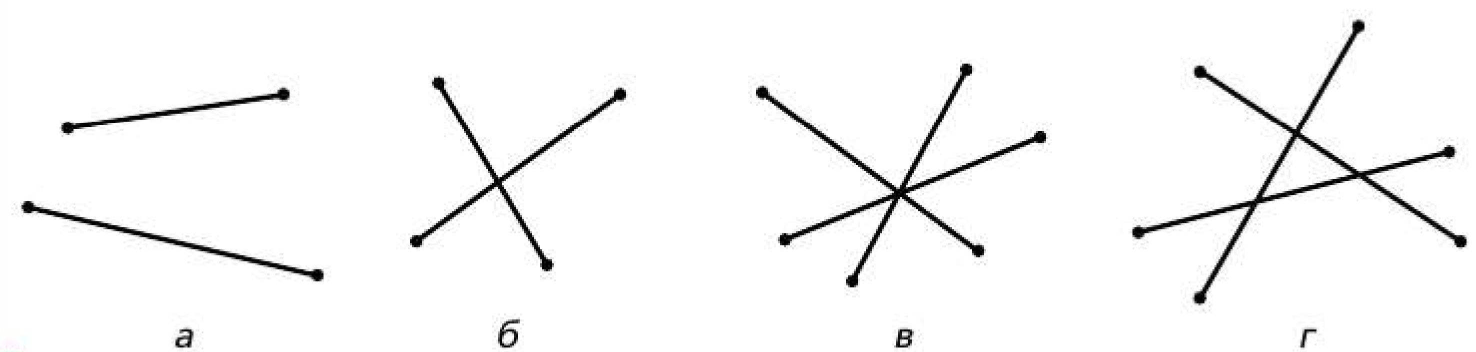


Рис. 2.22

2.32. Сколько точек надо отметить между точками A и B, чтобы вместе с отрезком AB образовалось шесть отрезков?

2.33. На прямой последовательно отметили точки A, B и C так, что $AB = 3$ см, $BC = 5$ см. Пользуясь только циркулем, разделите отрезок AB на три равных отрезка.

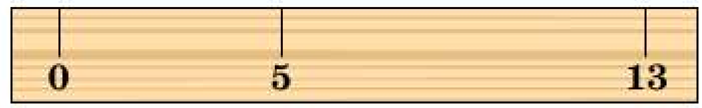


Рис. 2.23

2.34. На шкале линейки нанесены только деления 0 см, 5 см и 13 см (рис. 2.23). Как, пользуясь этой линейкой, можно построить отрезок длиной: 1) 3 см; 2) 2 см; 3) 1 см?

2.35. На шкале линейки нанесены только деления 0 см, 7 см и 11 см. Как, пользуясь этой линейкой, можно построить отрезок длиной: 1) 8 см; 2) 5 см?

§ 3 Луч. Угол. Измерение углов

Проведём прямую AB и отметим на ней произвольную точку O. Эта точка разбивает прямую на две части, выделенные на рисунке 3.1 разными цветами. Каждую из этих частей вместе с точкой O называют **лучом** или **полупрямой**. Точку O называют **началом луча**.

Каждый из лучей, изображённых на рисунке 3.1, состоит из точки O и всех точек прямой AB, *лежащих по одну сторону от точки* O.

Это позволяет обозначать луч, называя две его точки: первой обязательно указывают начало луча, второй — любую другую точку, принадлежащую лучу. Так, луч с началом в точке O (рис. 3.2) можно обозначить OM или ON.

Лучи OA и OB (см. рис. 3.1) дополняют друг друга до прямой. Также можно сказать, что объединением этих лучей является прямая.

Определение

Два луча, имеющих общее начало и лежащих на одной прямой, называют дополнительными.

Например, лучи BC и BA — дополнительные (рис. 3.3). Их объединением является прямая AC. Заметим, что, объединив лучи CA и

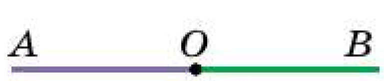


Рис. 3.1

Рис. 3.2

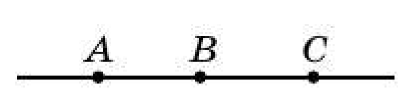


Рис. 3.3

AC, мы тоже получим прямую AC. Однако эти лучи не являются дополнительными: у них нет общего начала.

На рисунке 3.4, *а* изображена фигура, состоящая из двух лучей OA и OB, имеющих общее начало. Эта фигура делит плоскость на две части, выделенные разными цветами. Каждую из этих частей вместе с лучами OA и OB называют **углом.**

Лучи OA и OB называют **сторонами угла**, а точку O — **вершиной угла**.

Как видим, углы на рисунке 3.4, *а* внешне существенно различаются. Это различие определено следующим свойством. На лучах OA и OB выберем произвольно точки M и N (рис. 3.4, *б*). Отрезок MN принадлежит «зелёному» углу, а «фиолетовому» углу принадлежат лишь концы отрезка.

В дальнейшем, говоря «угол», будем подразумевать только тот, который содержит любой отрезок с концами на его сторонах. Ситуации, в которых придётся рассматривать углы, не обладающие этим свойством, будут специально оговариваться.

Есть несколько способов обозначения углов. Угол на рисунке 3.5 можно обозначить так: $\angle MON$, или $\angle NOM$, или просто $\angle O$ (читают соответственно: «угол MON», «угол NOM», «угол O»).

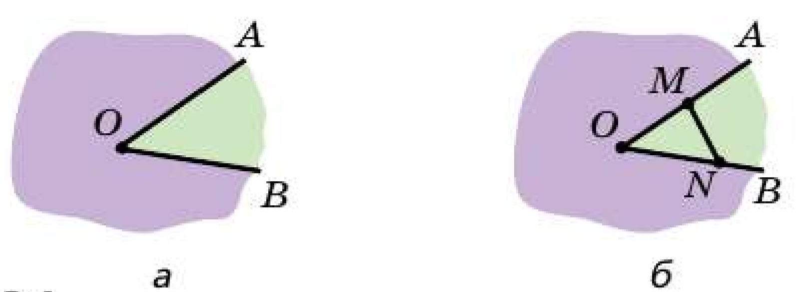


Рис. 3.4

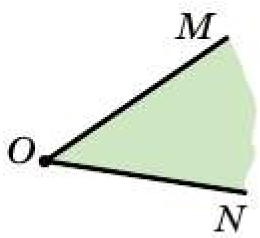


Рис. 3.5

На рисунке 3.6 изображено несколько углов, имеющих общую вершину. Здесь обозначение угла одной буквой может привести к путанице. В таких случаях углы удобно обозначать с помощью цифр: $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ (читают соответственно: «угол один», «угол два», «угол три»).

Определение

Угол, стороны которого являются дополнительными лучами, называют развёрнутым.

На рисунке 3.7 лучи OA и OB являются дополнительными, поэтому углы, выделенные зелёным и фиолетовым цветами, являются развёрнутыми.

Любая прямая делит плоскость на две **полуплоскости**, для которых эта прямая является **границей** (рис. 3.8). Считают, что прямая принадлежит каждой из двух полуплоскостей, для которых она является границей. А поскольку стороны развёрнутого угла образуют прямую, то можно также сказать, что развёрнутый угол — это полуплоскость, на границе которой отмечена точка — вершина угла.

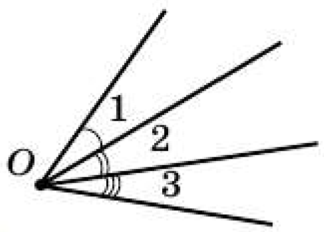


Рис. 3.6

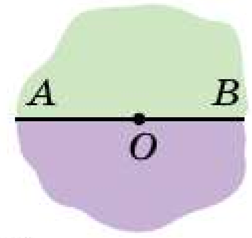


Рис. 3.7

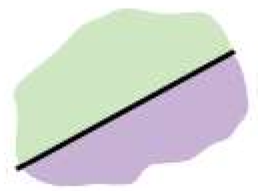


Рис. 3.8

Определение

Два угла называют равными, если их можно совместить наложением.

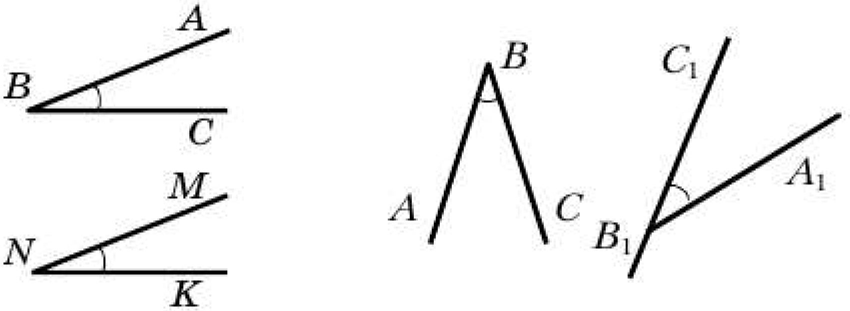
На рисунке 3.9, *а* изображены равные углы ABC и MNK. Пишут: $\angle ABC = \angle MNK$.

Понятно, что все развёрнутые углы равны.

Основное свойство откладывания углов

Для данного угла ABC и данного луча B_1C_1 существует единственный угол $A_1B_1C_1$, равный углу ABC, такой, что точка A_1 лежит в заданной полуплоскости относительно прямой B_1C_1 (рис 3.9, *б*).

На рисунке 3.10 изображены угол AOB и луч OC, принадлежащий этому углу, но отличный от его сторон. Будем говорить, что луч *OC проходит между сторонами угла AOB* и делит его на два угла AOC и COB.



а *б*

Рис. 3.9

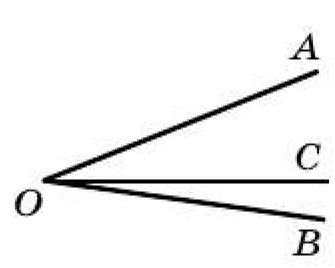


Рис. 3.10

Определение

Биссектрисой угла называют луч с началом в вершине угла, делящий этот угол на два равных угла.

На рисунке 3.11 луч OK — биссектриса угла AOB. Значит, $\angle AOK = \angle KOB$.

Вы знаете, что каждый угол имеет определённую величину. Для её измерения нужно выбрать единицу измерения — **единичный угол.** Выбрать его можно, например, так. Разделим развёрнутый угол на 180 равных углов (рис. 3.12). Угол, образованный двумя соседними лучами, принимают за единичный. Его величину называют **градусом** и записывают: $1°$.

Например, градусная мера (величина) угла AOB (рис. 3.13) равна $20°$ (этот факт легко установить с помощью транспортира). В таком случае говорят, что угол AOB равен $20°$, и записывают: $\angle AOB = 20°$.

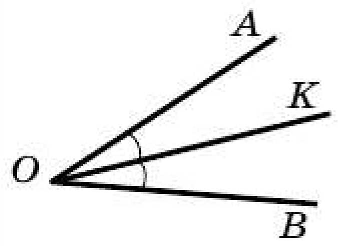


Рис. 3.11

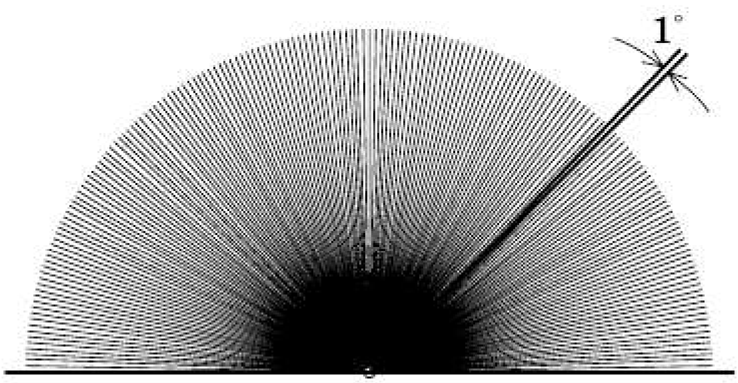


Рис. 3.12

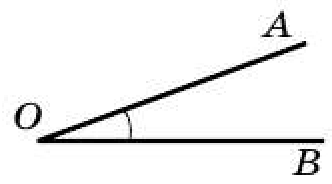


Рис. 3.13

Из принятого определения градуса следует, что *градусная мера развёрнутого угла равна* $180°$.

Для измерения углов на практике, помимо транспортира, используют и другие приборы специального назначения (рис. 3.14): астролябию, теодолит — для измерений на местности; буссоль — в артиллерии; секстант — в морском деле.

Для более точных результатов измерения углов используют части градуса: $\frac{1}{60}$ градуса равна одной минуте ($1'$), т. е. $1° = 60'$; $\frac{1}{60}$ минуты называют секундой ($1''$), т. е. $1' = 60''$. Например, запись $23°15'11''$ означает, что градусная мера угла составляет 23 градуса 15 минут 11 секунд.

Существуют и другие единицы измерения углов, например, в морском деле используют единицу 1 румб ($11°15'$).

Рис. 3.14

Определения

Угол, градусная мера которого меньше 90°, называют острым (рис. 3.15, *а*).

Угол, градусная мера которого равна 90°, называют прямым (рис. 3.15, *б*).

Угол, градусная мера которого больше 90°, но меньше 180°, называют тупым (рис. 3.15, *в*).

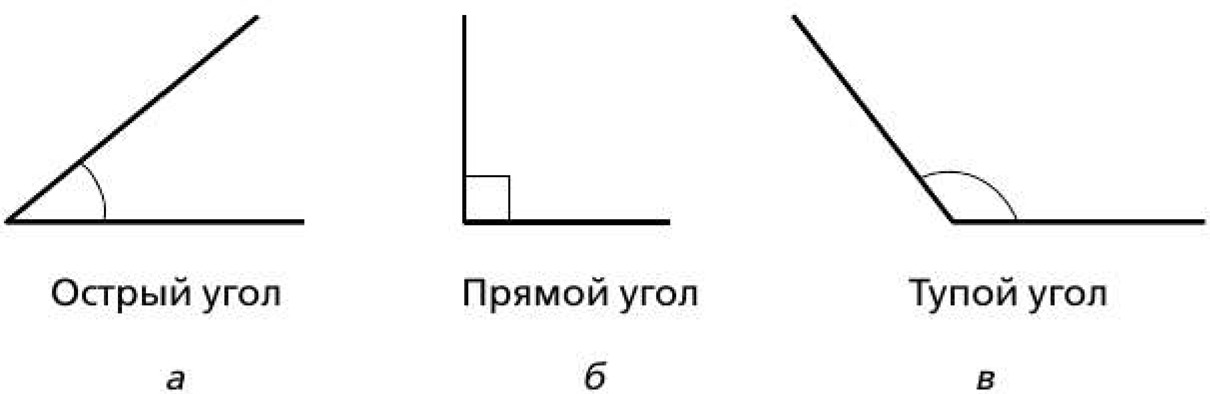


Рис. 3.15

Равные углы имеют равные величины, и наоборот, *если величины углов равны, то равны и сами углы*.

Если величина угла ABC больше величины угла MNP, то говорят, что угол ABC больше угла MNP, и записывают: $\angle ABC > \angle MNP$. Также говорят, что угол MNP меньше угла ABC, и записывают: $\angle MNP < \angle ABC$.

В дальнейшем, говоря «сумма углов», будем подразумевать сумму величин этих углов.

Основное свойство величины угла

Если луч OC делит угол AOB на два угла AOC и COB, то $\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$ (рис. 3.16).

Задача. На рисунке 3.17 $\angle AMC = \angle DMB$, $\angle BMC = 118°$. Найдите угол[1] AMB.

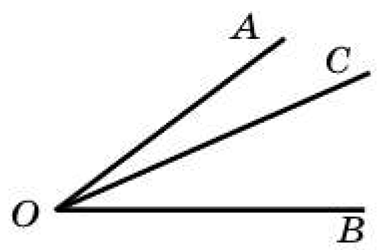


Рис. 3.16

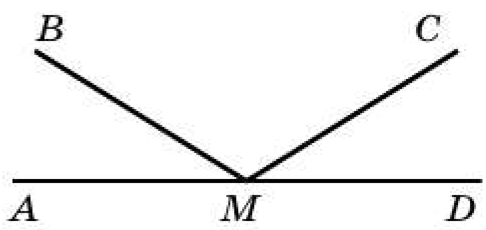


Рис. 3.17

Решение. Имеем: $\angle AMC = \angle AMB + \angle BMC$,
$\angle DMB = \angle DMC + \angle BMC$.
Поскольку $\angle AMC = \angle DMB$, то $\angle AMB = \angle DMC$.
Запишем: $\angle AMB + \angle BMC + \angle CMD = \angle AMD = 180°$.
Тогда $2\angle AMB + 118° = 180°$. Отсюда $\angle AMB = 31°$.
Ответ: $31°$. ■

1. Как обозначают луч?
2. Какие два луча называют дополнительными?
3. Как обозначают угол?
4. Какой угол называют развёрнутым?
5. Как называют части, на которые прямая делит плоскость?
6. Какие два угла называют равными?
7. Сформулируйте основное свойство откладывания углов.
8. Что называют биссектрисой угла?
9. Какой угол называют острым? Прямым? Тупым?
10. Что можно сказать о величинах равных углов?
11. Что можно сказать об углах, величины которых равны?
12. Сформулируйте основное свойство величины угла.

Практические задания

3.1. Проведите два луча AB и AC так, чтобы они не были дополнительными. Постройте для каждого из этих лучей дополнительный луч. Обозначьте и запишите все образовавшиеся лучи.

[1] Часто вместо «Найдите градусную меру угла...» говорят: «Найдите угол...».

3.2. Проведите отрезок AB и два луча AB и BA. Являются ли эти лучи дополнительными? Ответ обоснуйте.

3.3. Начертите угол MNE и проведите лучи NA и NC между его сторонами. Запишите все образовавшиеся углы.

3.4. Проведите лучи OA, OB, OC и OD так, чтобы луч OC проходил между сторонами угла AOB, а луч OD — между сторонами угла BOC.

3.5. Начертите два луча так, чтобы их общая часть была: 1) точкой; 2) отрезком; 3) лучом.

Упражнения

3.6. Прямая EF пересекает прямые AB и CD (рис. 3.18). Укажите:
1) все образовавшиеся лучи с началом в точке M;
2) все пары дополнительных лучей с началом в точке K.

3.7. Запишите все лучи, изображённые на рисунке 3.19. Укажите, какие из них являются дополнительными лучами с началом в точке O.

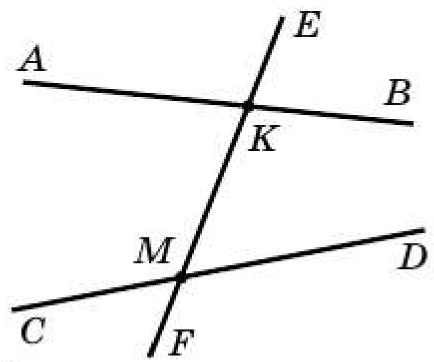


Рис. 3.18

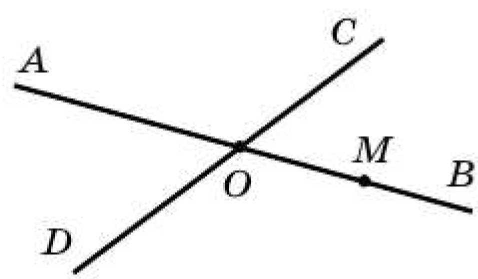


Рис. 3.19

3.8. Можно ли угол, изображённый на рисунке 3.20, обозначить так:

1) $\angle ABC$; 3) $\angle ADC$; 5) $\angle ACE$; 7) $\angle BDE$;
2) $\angle ACD$; 4) $\angle DCA$; 6) $\angle BCD$; 8) $\angle ECD$?

3.9. Запишите все углы, изображённые на рисунке 3.21.

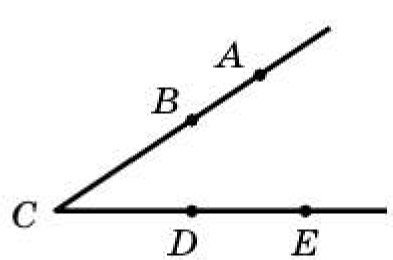


Рис. 3.20

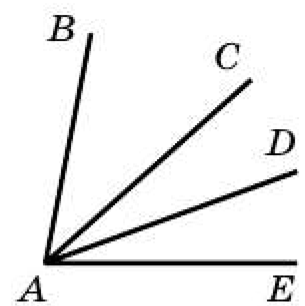


Рис. 3.21

3.10. На рисунке 3.22 $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOE = \angle EOF$.

1) Какой луч является биссектрисой угла AOC? Угла DOF? Угла BOF?

2) Биссектрисой каких углов является луч OC?

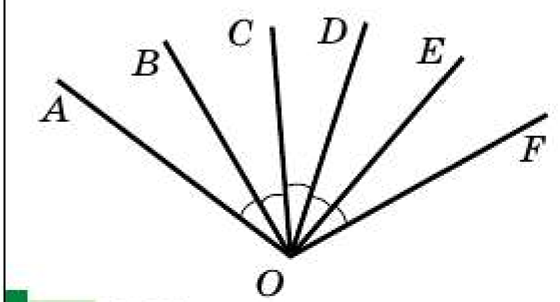


Рис. 3.22

3.11. Луч OC — биссектриса угла AOB. Можно ли совместить наложением:
1) углы AOC и BOC; 2) углы AOC и AOB?

3.12. Луч BD делит угол ABC на два угла. Найдите:
1) угол ABC, если $\angle ABD = 54°$, $\angle CBD = 72°$;
2) угол CBD, если $\angle ABC = 158°$, $\angle ABD = 93°$.

3.13. Луч OP проходит между сторонами угла MOK. Найдите угол MOP, если $\angle MOK = 172°$, $\angle POK = 85°$.

3.14. Верно ли утверждение:
1) любой угол, который меньше тупого угла, — острый;
2) угол, который меньше развёрнутого угла, — тупой;
3) угол, который в 2 раза меньше тупого угла, — острый;
4) сумма двух острых углов больше прямого угла;
5) угол, который в 2 раза меньше развёрнутого угла, больше любого острого угла;
6) угол, который больше прямого угла, — тупой?

3.15. Из вершины прямого угла BOM (рис. 3.23) провели два луча OA и OC так, что $\angle BOC = 74°$, $\angle AOM = 62°$. Найдите угол AOC.

3.16. Из вершины развёрнутого угла ACP (рис. 3.24) провели два луча CT и CF так, что $\angle ACF = 158°$, $\angle TCP = 134°$. Найдите угол TCF.

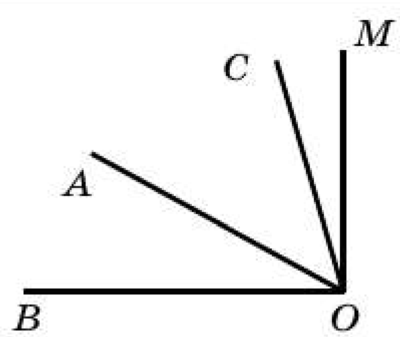


Рис. 3.23

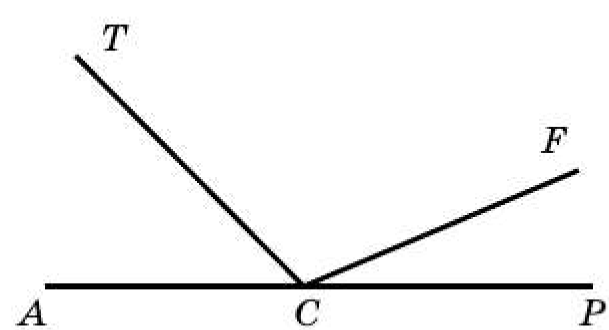


Рис. 3.24

3.17. Угол CEF равен 152°, луч EM проходит между его сторонами, угол CEM на 18° больше угла FEM. Найдите углы CEM и FEM.

3.18. Луч AK принадлежит углу BAD. Найдите углы BAK и DAK, если угол BAK в 7 раз меньше угла DAK и $\angle BAD = 72°$.

3.19. На рисунке 3.25 равные углы отмечены дугами. Найдите углы ABC, MKE и STK, если в качестве единичного угла взять: 1) угол ABC; 2) угол MKE.

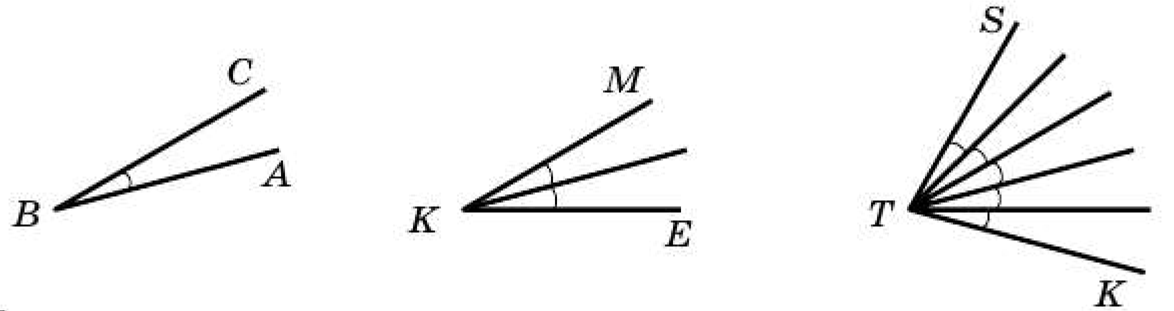


Рис. **3.25**

3.20. Луч OA образует со сторонами угла BOC равные углы. Верно ли, что он является биссектрисой этого угла?

3.21. Точки A, B и C расположены на прямой так, что $AB = 3{,}2$ см, $AC = 4{,}8$ см, $BC = 8$ см. Являются ли лучи AB и AC дополнительными?

3.22. На рисунке 3.26 угол ABC — прямой, $\angle ABE = \angle EBF = \angle FBC$, лучи BD и BK — биссектрисы углов ABE и FBC соответственно. Найдите угол DBK.

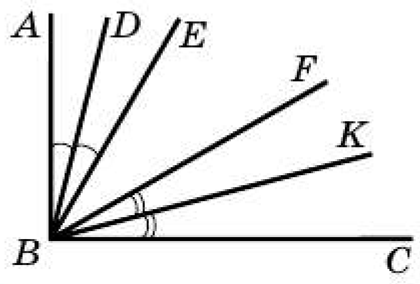


Рис. **3.26**

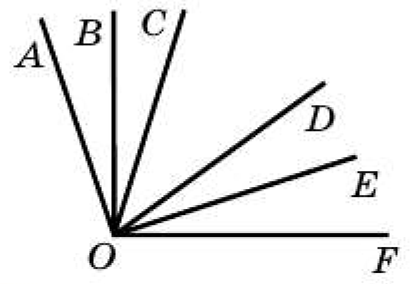


Рис. **3.27**

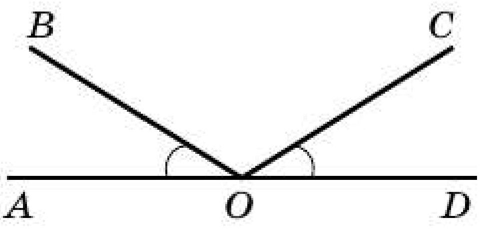


Рис. **3.28**

3.23. На рисунке 3.27 $\angle AOC = \angle COD = \angle DOF$, луч OB — биссектриса угла AOC, луч OE — биссектриса угла DOF, $\angle BOE = 72°$. Найдите угол AOF.

3.24. На рисунке 3.28 $\angle AOB = \angle DOC$. Есть ли ещё на этом рисунке равные углы? Ответ обоснуйте.

3.25. Углы FOK и MOE равны (рис. 3.29). Равны ли углы FOM и KOE?

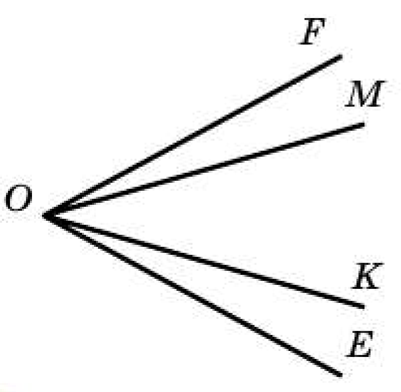


Рис. **3.29**

3.26. Луч BK является биссектрисой угла CBD, $\angle ABK = 146°$ (рис. 3.30). Найдите угол CBD.

3.27. Луч BK является биссектрисой угла CBD, $\angle CBD = 54°$ (рис. 3.30). Найдите угол ABK.

3.28. На сколько градусов поворачивается за 1 мин: 1) минутная стрелка; 2) часовая стрелка?

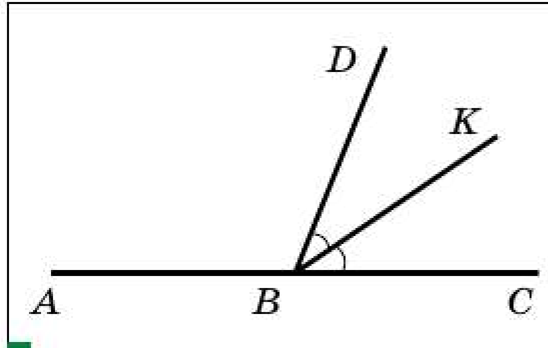


Рис. **3.30**

3.29. Найдите угол между стрелками часов, если они показывают: 1) 3 ч; 2) 6 ч; 3) 4 ч; 4) 11 ч; 5) 7 ч.

3.30. Угол ABC равен 30°, угол CBD — 80°. Найдите угол ABD. Сколько решений имеет задача?

3.31. Найдите угол MOK, если $\angle MON = 120°$, $\angle KON = 43°$. Сколько решений имеет задача?

3.32. Луч, проведённый из вершины прямого угла, делит его на два угла. Докажите, что угол между биссектрисами образовавшихся углов равен 45°.

3.33. Точка M принадлежит углу AOB, луч OC — биссектриса этого угла. Докажите, что угол MOC равен полуразности углов AOM и BOM.

3.34. Точка M лежит вне угла AOB, луч OC — биссектриса этого угла. Докажите, что угол AOC равен полусумме углов AOM и BOM.

3.35. Лучи OC, OD и OE принадлежат тупому углу AOB. Известно, что угол AOC прямой, а лучи OD и OE — соответственно биссектрисы углов AOB и BOC. Найдите угол DOE.

3.36. Лучи OC, OD и OE принадлежат углу AOB, градусная мера которого равна 150°. Известно, что $\angle AOC = 50°$, $\angle COD = 40°$, $\angle DOE = 15°$. Найдите угол BOE.

3.37. Лучи OB, OD и OE принадлежат углу AOC, градусная мера которого равна 160°. Известно, что $\angle AOB = 120°$, $\angle BOD = 30°$, $\angle DOE = 20°$. Найдите угол COE.

3.38. Как, имея шаблон угла, равного 70°, построить угол, равный 40°?

3.39. Как, имея шаблон угла, равного 40°, построить угол, равный 20°?

3.40. Как, имея шаблон угла, равного 35°, построить угол, равный 5°?

3.41. Как, имея шаблон угла, равного 13°, построить угол, равный 2°?

3.42. Лучи OA, OB, OC и OD таковы, что $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD$ и $\angle AOB = 3\angle AOD$. Найдите угол AOD.

3.43. Как построить угол, равный $1°$, используя шаблон угла, равного: 1) $19°$; 2) $7°$?

3.44. Проведите шесть прямых, пересекающихся в одной точке. Верно ли, что среди образовавшихся при этом углов есть угол, который меньше $31°$?

3.45. Лучи OC и OD принадлежат прямому углу AOB. Они проведены так, что $\angle COD = 10°$. Из пяти образовавшихся острых углов выбрали наибольший и наименьший. Оказалось, что их сумма равна $85°$. Найдите углы, на которые лучи OC и OD разделили угол AOB.

§ 4 Смежные и вертикальные углы

Определение

Два угла называют смежными, если у них одна сторона общая, а две другие являются дополнительными лучами.

На рисунке 4.1 углы MOE и EON смежные.

Теорема 4.1

Сумма смежных углов равна $180°$.

Доказательство

Пусть углы AOC и COB смежные (рис. 4.2). Надо доказать, что $\angle AOC + \angle COB = 180°$.

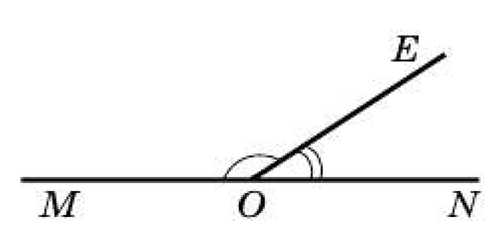


Рис. 4.1

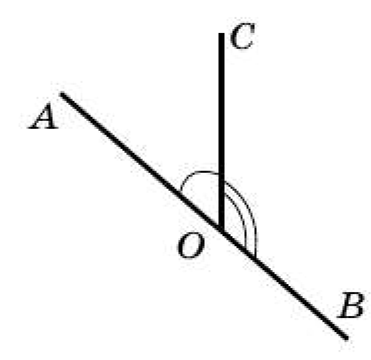


Рис. 4.2

Так как углы AOC и COB смежные, то лучи OA и OB являются дополнительными. Тогда угол AOB — развёрнутый. Следовательно, $\angle AOB = 180°$. Луч OC принадлежит углу AOB. По основному свойству величины угла имеем: $\angle AOC + \angle COB = \angle AOB = 180°$. ■

Определение

Два угла называют вертикальными, если стороны одного угла являются дополнительными лучами сторон другого.

На рисунке 4.3 углы AOB и COD вертикальные.

На рисунке 4.4 стороны «фиолетового» угла являются дополнительными лучами сторон «зелёного» угла. Поэтому эти развёрнутые углы являются вертикальными.

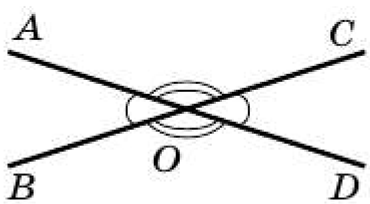


Рис. **4.3**

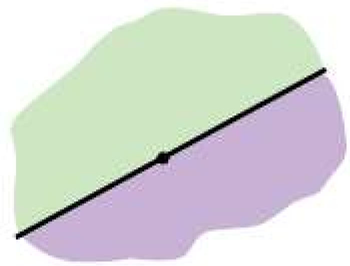


Рис. **4.4**

Очевидно, что при пересечении двух прямых образуются две пары вертикальных углов, отличных от развёрнутого. На рисунке 4.3 углы AOC и BOD также вертикальные.

Теорема 4.2

Вертикальные углы равны.

Доказательство

Если вертикальные углы являются развёрнутыми, то они равны.

На рисунке 4.5 углы 1 и 2 вертикальные и отличные от развёрнутого. Надо доказать, что $\angle 1 = \angle 2$.

Каждый из углов 1 и 2 смежный с углом 3. Тогда $\angle 1 + \angle 3 = 180°$ и $\angle 2 + \angle 3 = 180°$. Отсюда $\angle 1 = 180° - \angle 3$ и $\angle 2 = 180° - \angle 3$. Получаем, что градусные меры углов 1 и 2 равны, а значит, равны и сами углы. ■

Задача. На рисунке 4.6 $\angle ABE = \angle DCP$. Докажите, что $\angle FBC + \angle BCP = 180°$.

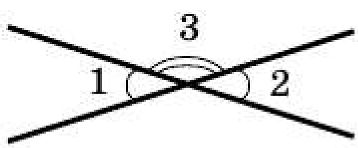


Рис. **4.5**

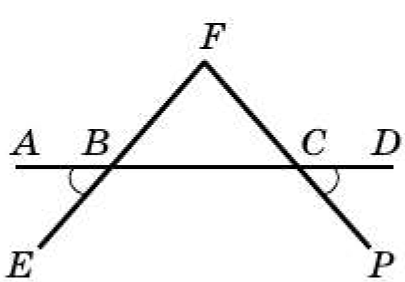


Рис. **4.6**

Решение. $\angle DCP + \angle BCP = 180°$, так как углы DCP и BCP смежные. Углы DCP и ABE равны по условию. Углы ABE и FBC равны как вертикальные.

Следовательно, $\angle DCP = \angle FBC$. Тогда $\angle FBC + \angle BCP = 180°$. ■

1. Какие два угла называют смежными?
2. Чему равна сумма смежных углов?
3. Какие два угла называют вертикальными?
4. Сформулируйте теорему о свойстве вертикальных углов.

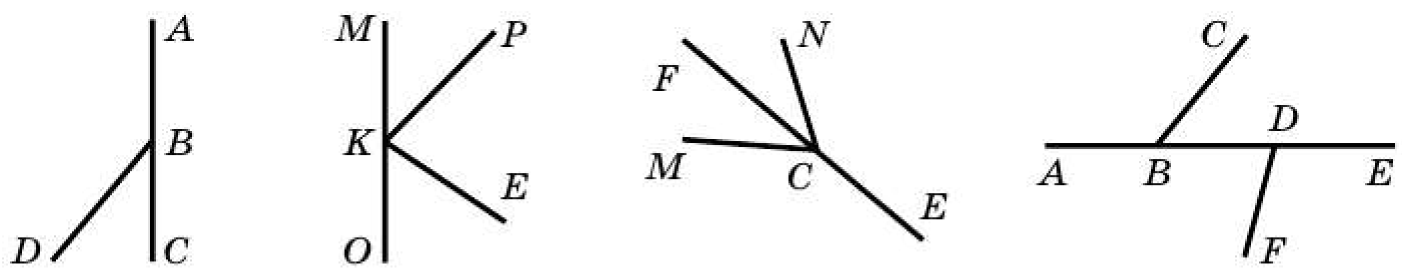
Практические задания

4.1. Начертите три угла: острый, прямой и тупой. Для каждого из них постройте смежный угол.

4.2. Начертите два неравных смежных угла так, чтобы их общая сторона была вертикальной.

Упражнения

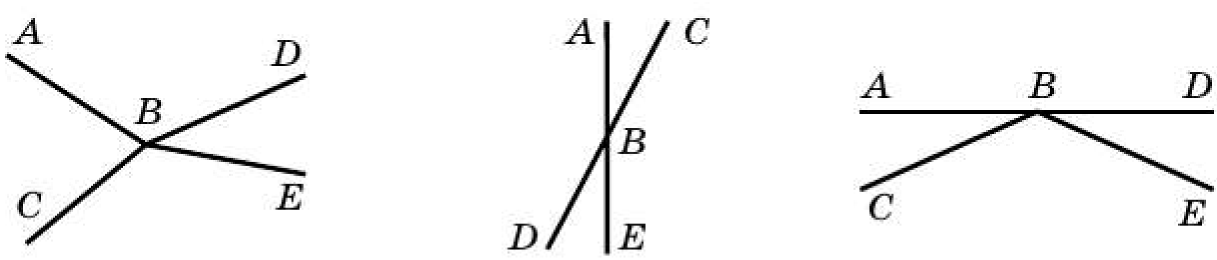
4.3. Укажите пары смежных углов (рис. 4.7).



а б в г

Рис. 4.7

4.4. Являются ли углы ABC и DBE вертикальными (рис. 4.8)?



а б в

Рис. 4.8

4.5. Сколько пар смежных углов изображено на рисунке 4.9? Назовите их. Укажите пары вертикальных углов.

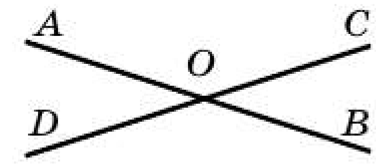


Рис. 4.9

4.6. Могут ли два смежных угла быть равными: 1) $24°$ и $156°$; 2) $63°$ и $107°$? Ответ обоснуйте.

4.7. Найдите угол, смежный с углом: 1) $29°$; 2) $84°$; 3) $98°$; 4) $135°$.

4.8. Может ли пара смежных углов состоять:
1) из двух острых углов;
2) из двух тупых углов;
3) из прямого и тупого углов;
4) из прямого и острого углов?

4.9. Один из смежных углов — прямой. Каким является второй угол?

4.10. Найдите угол, смежный с углом ABC, если: 1) $\angle ABC = 36°$; 2) $\angle ABC = 102°$.

4.11. Найдите углы 2, 3 и 4 (рис. 4.10), если $\angle 1 = 42°$.

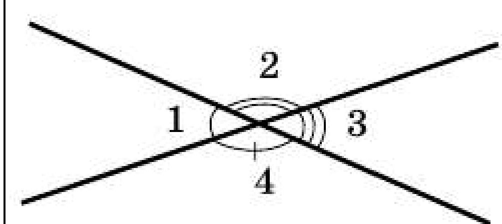


Рис. 4.10

4.12. Найдите смежные углы, если:
1) один из них на $70°$ больше другого;
2) один из них в 8 раз меньше другого;
3) их градусные меры относятся как $3 : 2$.

4.13. Найдите смежные углы, если:
1) один из них в 17 раз больше другого;
2) их градусные меры относятся как $19 : 26$.

4.14. Верно ли утверждение:
1) для каждого угла можно построить только один вертикальный угол;
2) для каждого угла, отличного от развёрнутого, можно построить только один смежный угол;
3) если углы равны, то они вертикальные;
4) если углы не равны, то они не вертикальные;
5) если углы не вертикальные, то они не равны;
6) если два угла смежные, то один из них острый, а другой — тупой;
7) если два угла смежные, то один из них больше другого;
8) если сумма двух углов равна $180°$, то они смежные;
9) если сумма двух углов не равна $180°$, то они не смежные;
10) если два угла равны, то смежные с ними углы также равны;
11) если смежные углы равны, то они прямые;

12) если равные углы имеют общую вершину, то они вертикальные;

13) если два угла имеют общую сторону, то они смежные?

4.15. Сумма двух углов, образованных при пересечении двух прямых, равна 140°. Докажите, что эти углы вертикальные.

4.16. Найдите углы, образованные при пересечении двух прямых, если:
1) сумма двух из них равна 106°;
2) сумма трёх из них равна 305°.

4.17. Найдите углы, образованные при пересечении двух прямых, если разность двух из них равна 64°.

4.18. Три прямые пересекаются в одной точке (рис. 4.11). Найдите $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$.

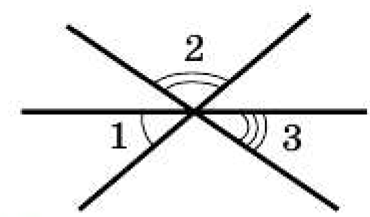


Рис. 4.11

4.19. Прямые AB, CD и MK пересекаются в точке O (рис. 4.12), $\angle AOC = 70°$, $\angle MOB = 15°$. Найдите углы DOK, AOM и AOD.

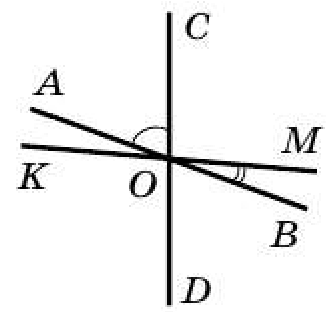


Рис. 4.12

4.20. Найдите угол между биссектрисами смежных углов.

4.21. Найдите угол между биссектрисами вертикальных углов.

4.22. Углы ABF и FBC смежные, $\angle ABF = 80°$, луч BD принадлежит углу ABF, $\angle ABD = 30°$. Найдите угол между биссектрисами углов DBF и FBC.

4.23. Углы AOB и BOC смежные, луч OD — биссектриса угла AOB, угол BOD на 18° меньше угла BOC. Найдите углы AOB и BOC.

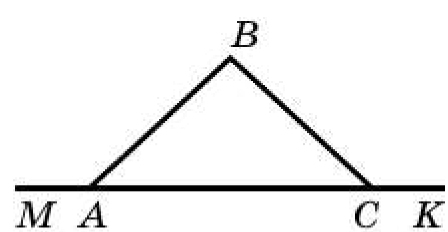


Рис. 4.13

4.24. Найдите смежные углы MKE и PKE, если угол FKE на 24° больше угла PKE, где луч KF — биссектриса угла MKE.

4.25. На рисунке 4.13 $\angle MAB + \angle ACB = 180°$. Докажите, что $\angle MAB = \angle KCB$.

4.26. На рисунке 4.14 $\angle MBC = \angle BEF$. Докажите, что $\angle ABE + \angle BED = 180°$.

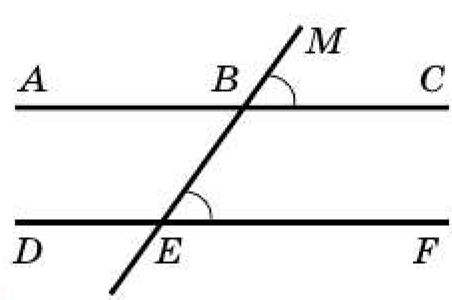


Рис. 4.14

4.27. Два угла имеют общую сторону, а их сумма равна 180°. Можно ли утверждать, что эти углы являются смежными?

4.28. Верно ли утверждение:

1) если два угла имеют общую вершину и их биссектрисы являются дополнительными лучами, то эти углы — вертикальные;

2) если биссектрисы двух равных углов лежат на одной прямой, то эти углы — вертикальные?

4.29. На листе бумаги изображён угол. В пределах листа находятся его вершина и столь малые части сторон, что для его измерения невозможно воспользоваться транспортиром (рис. 4.15). Как найти градусную меру этого угла?

Рис. **4.15**

§ 5 Перпендикулярные прямые

На рисунке 5.1 отмечены четыре угла, которые образовались при пересечении прямых a и b. Легко показать (сделайте это самостоятельно), что если один из углов прямой (например, угол 1), то и углы 2, 3 и 4 также прямые.

Определение

Две прямые называют перпендикулярными, если при их пересечении образовался прямой угол.

На рисунке 5.1 прямые a и b перпендикулярны. Пишут: $a \perp b$ или $b \perp a$.

На рисунке 5.2 прямые AD и BC не перпендикулярны. При их пересечении образовались пара равных острых углов и пара равных тупых углов. Величину образовавшегося острого угла называют **углом между прямыми** AD и BC.

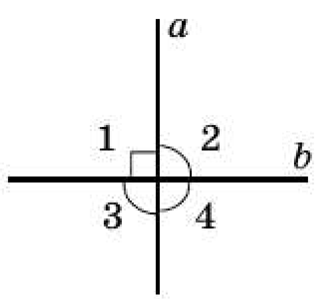


Рис. **5.1**

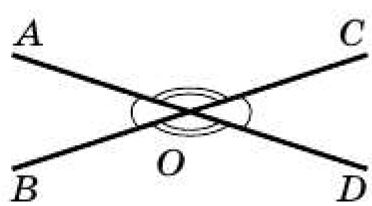


Рис. **5.2**

Если прямые перпендикулярны, то считают, что угол между ними равен 90°.

Из сказанного следует, что угол между двумя прямыми не превосходит 90°.

Определение

Два отрезка называют перпендикулярными, если они лежат на перпендикулярных прямых.

На рисунке 5.3 отрезки AB и CD перпендикулярны. Пишут: $AB \perp CD$.

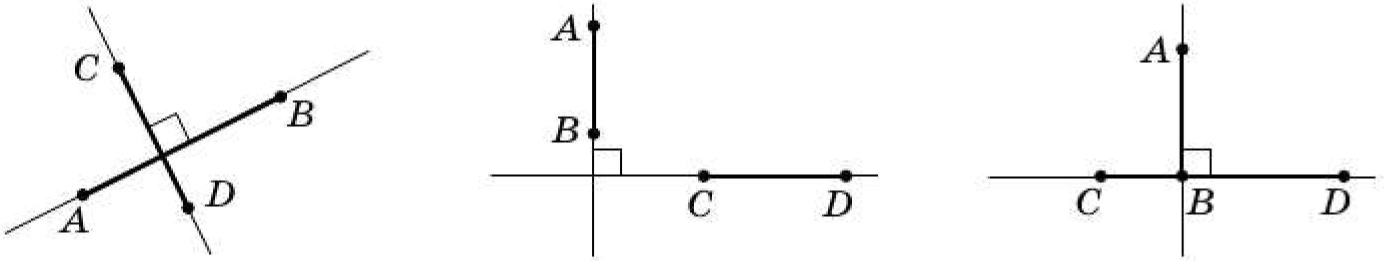


Рис. 5.3

Также можно рассматривать перпендикулярность двух лучей, луча и отрезка, прямой и луча, отрезка и прямой. Например, на рисунке 5.4 изображены перпендикулярные отрезок CD и луч AB.

На рисунке 5.5 изображены прямая a и перпендикулярный ей отрезок AB, конец B которого принадлежит прямой a. В таком случае говорят, что из точки A на прямую a **опустили перпендикуляр** AB. Точку B называют **основанием перпендикуляра** AB.

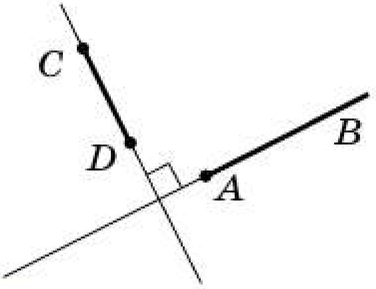


Рис. 5.4

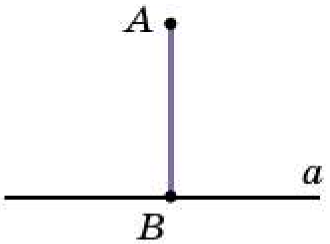


Рис. 5.5

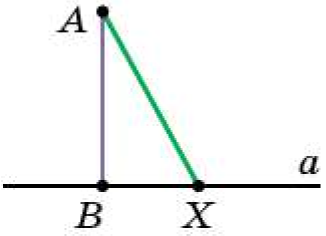


Рис. 5.6

Пусть X — произвольная точка прямой a, отличная от точки B (рис. 5.6). Отрезок AX называют **наклонной**, проведённой из точки A к прямой a.

Часто в повседневной жизни нам приходится искать расстояние от данного местоположения до какого-то объекта (школы, дороги, реки и т. п.). Аналогом такой задачи в геометрии является поиск расстояния от данной точки до данной фигуры. Решая эту задачу, стараются указать отрезок наименьшей длины, соединяющий данную точку с точкой фигуры. Если такой отрезок существует, то его длину называют **расстоянием от точки до фигуры**.

В § 17 будет доказано, что если из одной точки к прямой проведены перпендикуляр и наклонная, то перпендикуляр меньше наклонной (см. рис. 5.6). Таким образом, перпендикуляр, опущенный из данной точки на прямую, — это отрезок наименьшей длины, соединяющий данную точку с точкой прямой. Поэтому целесообразно принять следующее определение.

Определение

Расстоянием от точки, не принадлежащей прямой, до этой прямой называют длину перпендикуляра, опущенного из данной точки на прямую.

Если точка принадлежит прямой, то считают, что расстояние от этой точки до прямой равно нулю.

На рисунке 5.5 длина отрезка AB — это расстояние от точки A до прямой a.

На рисунке 5.7 изображён перпендикуляр OM, опущенный из точки O на прямую AB. Точка M, его основание, принадлежит отрезку AB (лучу AB). Понятно, что в этом случае длина перпендикуляра OM меньше любого отрезка, соединяющего точку O с любой другой точкой отрезка AB (луча AB), отличной от точки M. Поэтому расстояние от точки O до отрезка AB (луча AB) — это длина отрезка OM.

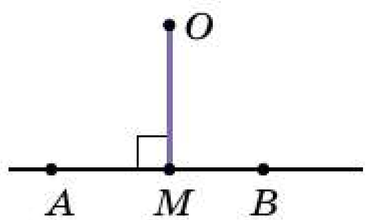


Рис. 5.7

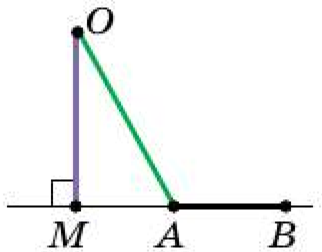


Рис. 5.8

На рисунке 5.8 изображён перпендикуляр OM, опущенный из точки O на прямую AB. Точка M, его основание, не принадлежит отрезку AB (лучу AB). В этом случае отрезок OA меньше любого отрезка, соединяющего точку O с любой другой точкой отрезка AB (луча AB). Этот факт будет доказан в § 17. Поэтому расстояние от точки O до отрезка AB (луча AB) — это длина отрезка OA.

Теорема 5.1

Через каждую точку прямой можно провести прямую, перпендикулярную данной, и притом только одну.

Доказательство

Отметим на прямой AB произвольную точку M и сначала покажем, что через точку M можно провести прямую, перпендикулярную прямой AB. Отложим от луча MB (рис. 99) угол CMB, равный прямому (это можно сделать в силу основного свойства откладывания углов). Тогда прямая CM перпендикулярна данной прямой AB.

Предположим, что через точку M проходит еще одна прямая, отличная от CM и перпендикулярная прямой AB. Пусть точка D этой прямой лежит в той же полуплоскости относительно прямой AB, что и точка C (см. рис. 99). Тогда получаем, что от луча MB в одну полуплоскость отложены два угла CMB и DMB, равные прямому, что противоречит основному свойству откладывания углов. ■

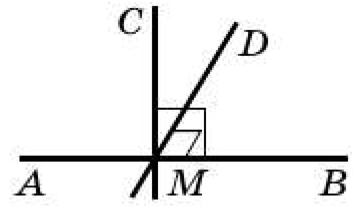


Рис. 5.9

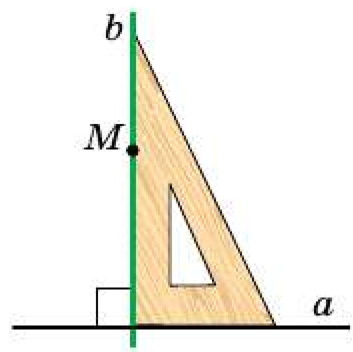


Рис. 5.10

Вы умеете через произвольную точку M, не принадлежащую прямой a, проводить прямую b, перпендикулярную прямой a (рис. 5.10). То, что такая прямая b единственная, будет доказано в § 7.

1. Какие две прямые называют перпендикулярными?
2. Каким символом обозначают перпендикулярные прямые?
3. Что называют углом между двумя пересекающимися прямыми?
4. Какие два отрезка называют перпендикулярными?
5. Что называют расстоянием от точки до прямой?
6. Сколько через каждую точку прямой можно провести прямых, перпендикулярных данной?

Практические задания

5.1. Перерисуйте в тетрадь рисунок 5.11. Пользуясь угольником, проведите через точку M прямую, перпендикулярную прямой a.

а б в г

Рис. 5.11

5.2. Проведите прямую c и отметьте на ней точку K. Пользуясь угольником, проведите через точку K прямую, перпендикулярную прямой c.

5.3. Проведите прямую d и отметьте точку M, не принадлежащую ей. С помощью угольника проведите через точку M прямую, перпендикулярную прямой d.

5.4. Начертите угол ABK, равный: 1) 73°; 2) 146°. Отметьте на луче BK точку C и проведите через неё прямые, перпендикулярные прямым AB и BK.

5.5. Начертите два перпендикулярных отрезка так, чтобы они: 1) пересекались и не имели общего конца; 2) не имели общих точек; 3) имели общий конец.

5.6. Начертите два перпендикулярных луча так, чтобы они: 1) пересекались; 2) не имели общих точек.

5.7. Перерисуйте в тетрадь рисунок 5.12. Постройте отрезок, длина которого равна расстоянию от точки A: 1) до прямой MN; 2) до отрезка MN; 3) до луча MN.

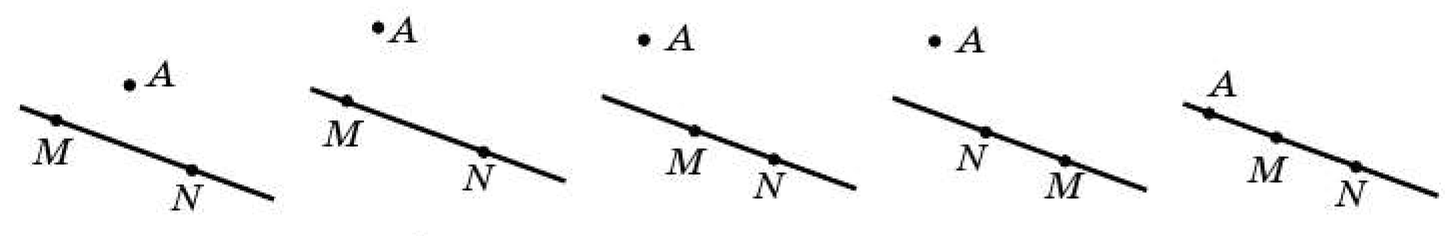


Рис. 5.12

Упражнения

5.8. Прикладывая угольник то одной, то другой стороной, ученик через точку A провёл два перпендикуляра к прямой a (рис. 5.13). Что можно сказать об этом угольнике?

5.9. Может ли угол между прямыми быть равным: 1) 1°; 2) 90°; 3) 92°?

5.10. Прямая m проходит через вершину прямого угла и перпендикулярна одной из его сторон. Докажите, что прямая m содержит другую сторону угла.

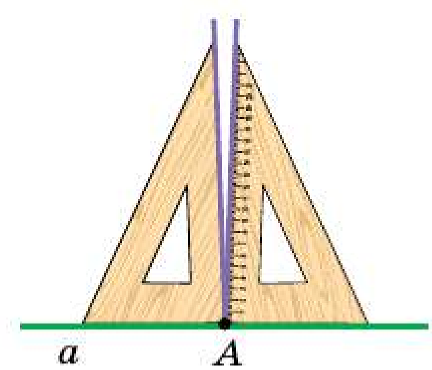


Рис. 5.13

5.11. Докажите, что если биссектрисы углов AOB и BOC перпендикулярны, то точки A, O и C лежат на одной прямой.

5.12. На рисунке 5.14 $AB \perp CD$, $\angle COK = 42°$, $\angle MOC + \angle BOK = 130°$. Найдите: 1) угол MOK; 2) угол MOD.

5.13. На рисунке 5.15 $AC \perp DK$, $OB \perp BF$, $\angle DBO = 54°$. Найдите угол ABF.

5.14. Угол ABC равен 160°, лучи BK и BM проходят между сторонами этого угла и перпендикулярны им. Найдите угол MBK.

5.15. На рисунке 5.16 $BF \perp AC$, $BD \perp BK$. Докажите, что $\angle ABD = \angle FBK$.

5.16. На рисунке 5.16 $\angle ABD = \angle FBK$, $\angle DBF = \angle KBC$. Докажите, что $BF \perp AC$.

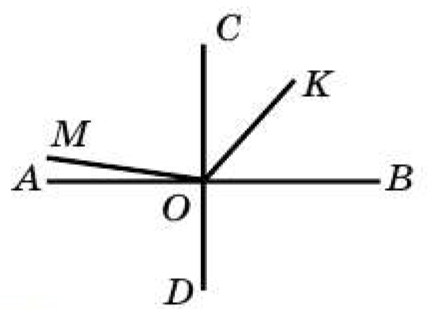


Рис. 5.14

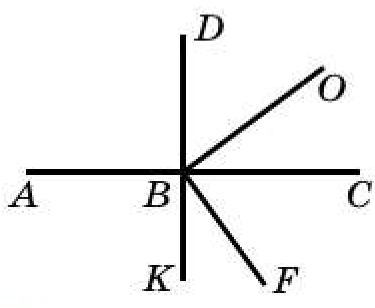


Рис. 5.15

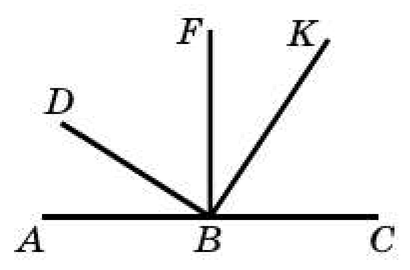


Рис. 5.16

5.17. Лучи OC и OD принадлежат развёрнутому углу AOB. Известно, что углы AOC и BOD равны. Как с помощью угольника построить биссектрису угла COD?

5.18. Из вершины угла ABC, равного 70°, проведены лучи BD и BF так, что $BD \perp BA$, $BF \perp BC$, лучи BD и BC принадлежат углу ABF. Найдите углы DBF и ABF.

5.19. Прямые m и n содержат биссектрисы углов, образованных при пересечении прямых a и b. В каком случае прямые a и b содержат биссектрисы углов, образованных при пересечении прямых m и n?

5.20. Существует ли точка, расстояние от которой до данного отрезка AB больше, чем расстояние до луча AB?

5.21. Пользуясь угольником и шаблоном угла, равного 17°, постройте угол, равный: 1) 5°; 2) 12°.

5.22. Пользуясь угольником и шаблоном угла, равного 20°, постройте угол, равный 10°.

5.23. Можно ли с помощью шаблона угла, равного 27°, построить перпендикулярные прямые?

5.24. Углы AOB и MON расположены так, что $OM \perp OA$ и $ON \perp OB$ (рис. 5.17). Докажите, что каждая точка угла MON равноудалена от сторон угла AOB.

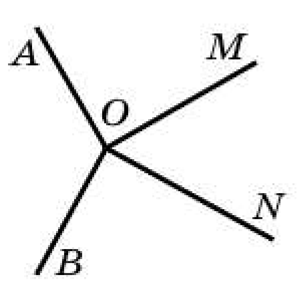


Рис. 5.17

Аксиомы

В предыдущих пунктах были доказаны четыре теоремы. Каждый раз, доказывая новое свойство фигуры, мы опирались на ранее известные геометрические факты. Например, при доказательстве теоремы о вертикальных углах было использовано свойство смежных углов. Руководствуясь этим принципом, мы докажем ещё много новых теорем. Но уже сейчас, на начальном этапе изучения геометрии, возникает естественный вопрос: если свойства геометрических фигур изучают по принципу «новое из старого», то должны существовать первоначальные факты, и тогда на чём основано доказательство их истинности? Ведь до них никаких истинных утверждений не было. Решить эту проблему можно единственным способом: принять первые свойства без доказательств. Так и поступают математики. Эти свойства называют **аксиомами**.

В качестве аксиом выбирают утверждения, которые просты, очевидны и не вызывают сомнений. Ведь недаром слово «аксиома» происходит от греческого «аксиос», что означает «достойный признания».

Некоторые аксиомы были сформулированы в предыдущих пунктах. Мы называли их **основными свойствами**.

Часть аксиом мы не выделяли каким-то специальным образом, а просто привели как наглядно очевидные утверждения. Так, в § 2, 3 были сформулированы следующие аксиомы:

- **для любых двух точек существует единственный отрезок, для которого эти точки являются концами;**
- **каждый отрезок имеет определённую длину;**
- **каждый угол имеет определённую величину.**

Мы опирались и на некоторые другие истинные утверждения, принятые без доказательства, т. е. по сути аксиомы, которые, однако, не были сформулированы в явном виде. Например, в § 1, описывая рисунок 1.3, мы фактически использовали такую аксиому:

- **какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей.**

Строя отрезок, равный данному, и угол, равный данному, мы по сути опирались на такие аксиомы:

- **на любом луче от его начала можно отложить отрезок, равный данному, и притом только один;**
- **от любого луча в данную полуплоскость можно отложить угол, равный данному, и притом только один.**

Аксиомы используют не только в математике. Нередко в обыденной жизни любое истинное, не требующее обоснования утверждение называют аксиомой. Например, говорят: «После марта наступит апрель. Это аксиома».

Аксиомы возникают не только из практики или наблюдений.

Для каждого гражданина России Конституция — это список аксиом. Поэтому аксиому можно рассматривать как закон или правило. Но законы (правила игры) принимают, то есть они возникают в результате договорённости людей между собой. Следовательно, и аксиомы геометрии можно рассматривать как утверждённые правила, на основании которых геометры, как каменщики, строят здание науки (рис. 6.1).

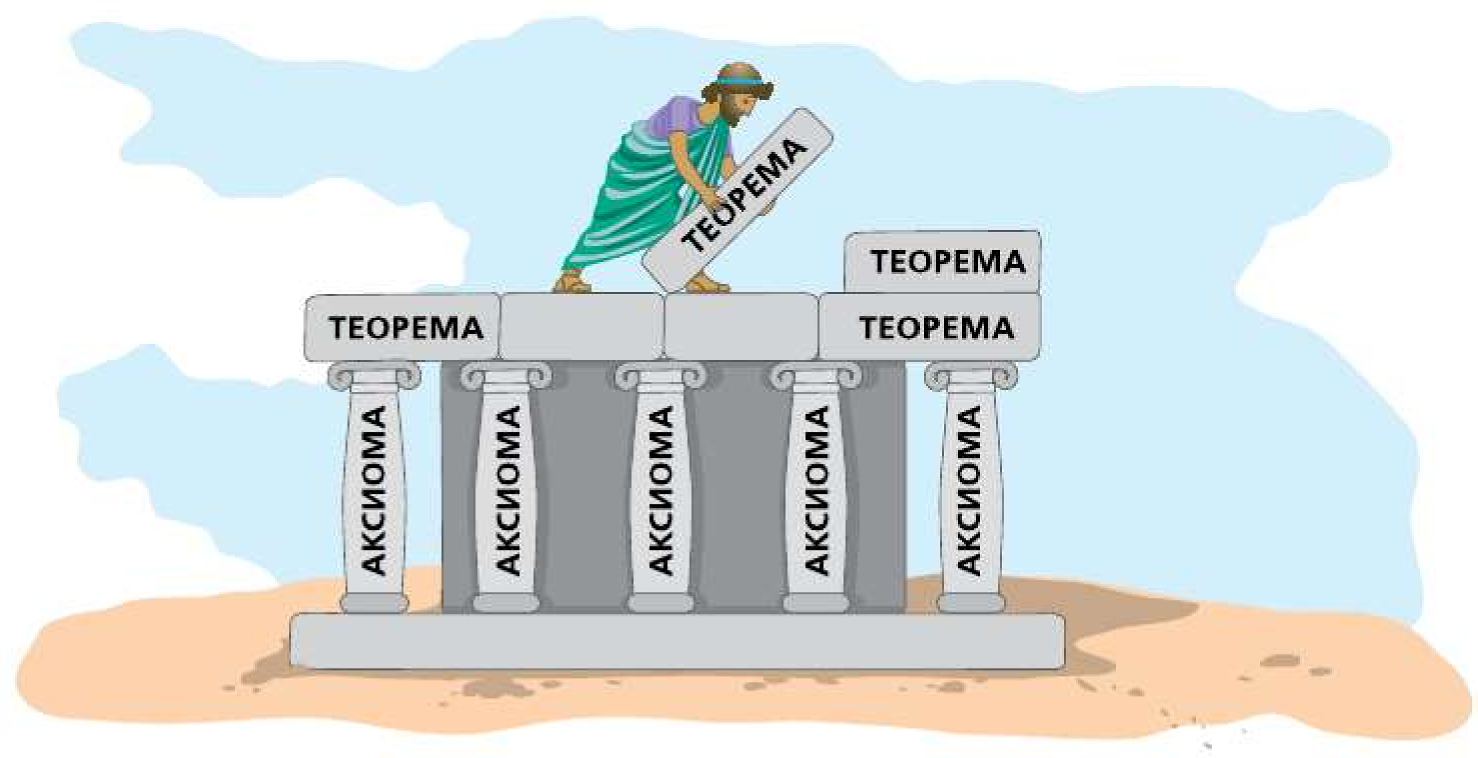


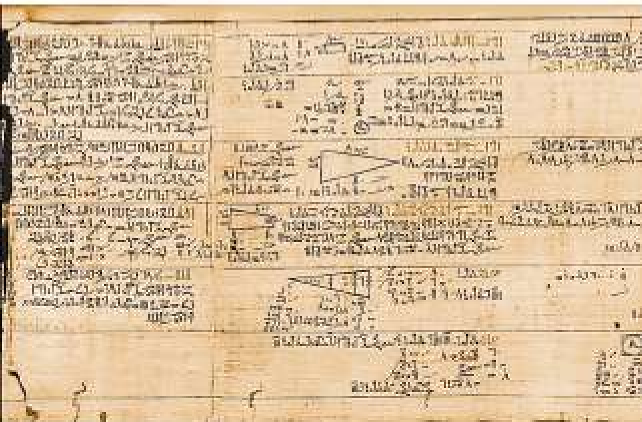
Рис. 6.1

Тогда у вас может возникнуть вопрос: «Неужели на геометрию можно смотреть как на игру, например такую, как шахматы?» В какой-то степени — да. Но при этом надо понимать, что шахматные правила, а значит, и сама игра возникли благодаря человеческой фантазии. Вместе с тем геометрические правила (аксиомы) возникли из практики и наблюдений. Поэтому геометрия, в отличие от шахмат, используется очень широко.

Если вы изберёте профессию математика, то сможете ознакомиться с совершенно иными геометриями, которые отличаются от изучаемой в школе тем, что они строятся на других аксиомах.

Из истории геометрии

Когда и где возникли первые геометрические сведения? Специалисты не отвечают на этот вопрос однозначно. Одни считают, что первооткрывателями были египетские и вавилонские землемеры, жившие за 4000 лет до н. э., другие полагают, что геометрия зародилась в Древнем Египте 5000 лет назад.



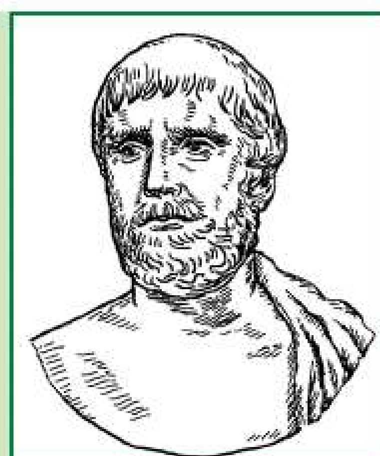
Древний папирус

Египетские пирамиды

Может показаться странным, но вопрос, когда возникла **наука геометрия**, не вызывает споров. Историки едины во мнении: в VI в. до н. э. Такое единодушие, на первый взгляд, может удивить: ведь и до того времени народы древнего мира накопили огромный объём геометрических знаний. Например, совершенно очевидно, что без геометрического опыта египтяне не подарили бы миру одно из семи чудес света — пирамиды. И всё-таки, почему обилие накопленных геометрических фактов неравносильно существованию геометрической науки?

Геометрия стала наукой лишь тогда, когда её истины начали устанавливать путём доказательства.

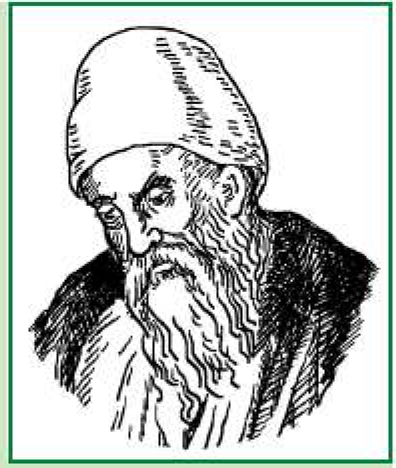
Появление «доказательной геометрии» связано с именем первого из «семи мудрецов» — Фалеса Милетского[1] (ок. 625—547 гг. до н. э.) — философа, учёного, купца и государственного деятеля.



Фалес Милетский

[1] Милет — порт в Малой Азии на побережье Эгейского моря.

Задолго до Фалеса было известно, что вертикальные углы равны, что диаметр делит круг на две равные части. Никто в истинности этих фактов не сомневался. А Фалес доказал их, тем самым прославив себя.



Евклид

В VI—III вв. до н. э. благодаря учёным Древней Греции, таким как Пифагор, Евдокс, Архит, Теэтет, Евклид (Эвклид), Архимед, геометрия из прикладной науки превратилась в математическую теорию.

Книгу, по которой учили геометрию более 2000 лет, без преувеличения можно назвать великой. Она называется «Начала», её автор — Евклид (ок. 365—300 гг. до н. э.). К сожалению, о самом Евклиде мало что известно. В таких случаях личность обрастает легендами, одна из которых весьма поучительна. Царь Птолемей I спросил Евклида, существует ли более простой путь познания геометрии, чем изложенный в «Началах». Евклид ответил: «В геометрии нет царских дорог».

«Начала» Евклида

А какой же путь в геометрию избрал Евклид в своих «Началах»? Аксиоматический. В фундаменте науки — список простейших фактов. Их называют **постулатами** (от латинского *postulatum* — «требование») и аксиомами. Затем на их основе путём логических рассуждений доказывают все другие свойства — теоремы.

Постулатов у Евклида пять. Приведём первые четыре.

I постулат	**Требуется, чтобы от каждой точки ко всякой другой точке можно было провести прямую линию.**
II постулат	**И чтобы каждую прямую можно было неограниченно продолжить.**
III постулат	**И чтобы из любого центра можно было описать окружность любого радиуса.**
IV постулат	**И чтобы все прямые углы были равны.**

О пятом постулате мы расскажем после § 14.

На протяжении многих веков с «Началами» Евклида по популярности могла сравниться разве что Библия. Так, ещё в конце XIX в. в ряде европейских стран геометрию преподавали по упрощённым изданиям «Начал». И сейчас геометрия, которую изучают в школе, во многом следует идеям Евклида.

Итоги главы 1

Основное свойство прямой

Через любые две точки можно провести прямую, и притом только одну.

Пересекающиеся прямые

Две прямые, имеющие общую точку, называют пересекающимися.

Теорема о двух пересекающихся прямых

Любые две пересекающиеся прямые имеют только одну общую точку.

Равные отрезки

- Два отрезка называют равными, если их можно совместить наложением.
- Равные отрезки имеют равные длины, и наоборот, если длины отрезков равны, то равны и сами отрезки.

Основное свойство длины отрезка

Если точка C является внутренней точкой отрезка AB, то отрезок AB равен сумме отрезков AC и CB, т. е. $AB = AC + CB$.

Расстояние между точками

Расстоянием между точками A и B называют длину отрезка AB.

Дополнительные лучи

Два луча, имеющие общее начало и лежащие на одной прямой, называют дополнительными.

Развёрнутый угол

Угол, стороны которого являются дополнительными лучами, называют развёрнутым.

Равные углы

- Два угла называют равными, если их можно совместить наложением.
- Равные углы имеют равные величины, и наоборот, если величины углов равны, то равны и сами углы.

Основное свойство откладывания углов

Для данного угла ABC и данного луча B_1C_1 существует единственный угол $A_1B_1C_1$, равный углу ABC, такой, что точка A_1 лежит в заданной полуплоскости относительно прямой B_1C_1.

Биссектриса угла

Биссектрисой угла называют луч с началом в вершине угла, делящий этот угол на два равных угла.

Острый, прямой, тупой углы

- Угол, градусная мера которого меньше 90°, называют острым.
- Угол, градусная мера которого равна 90°, называют прямым.
- Угол, градусная мера которого больше 90°, но меньше 180°, называют тупым.

Основное свойство величины угла

Если луч OC делит угол AOB на два угла AOC и COB, то $\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$.

Смежные углы

Два угла называют смежными, если у них одна сторона общая, а две другие являются дополнительными лучами.

Свойство смежных углов

Сумма смежных углов равна 180°.

Вертикальные углы

Два угла называют вертикальными, если стороны одного угла являются дополнительными лучами сторон другого.

Свойство вертикальных углов

Вертикальные углы равны.

Перпендикулярные прямые

Две прямые называют перпендикулярными, если при их пересечении образовался прямой угол.

Расстояние от точки до прямой

Расстоянием от точки, не принадлежащей прямой, до прямой называют длину перпендикуляра, опущенного из данной точки на прямую. Если точка принадлежит прямой, то считают, что расстояние от этой точки до прямой равно нулю.

Теорема о существовании и единственности прямой, перпендикулярной данной

Через каждую точку прямой проходит только одна прямая, перпендикулярная данной.

глава

2 Треугольники

- Как, не накладывая один треугольник на другой, узнать, равны ли они? Какими свойствами обладают равнобедренный и равносторонний треугольники? Как «устроена» теорема? На эти и многие другие вопросы вы найдёте ответы в данной главе.

§ 7 Равные треугольники. Высота, медиана, биссектриса треугольника

Рассмотрим три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой. Соединим их отрезками AB, BC и CA. Полученная фигура ограничивает часть плоскости, выделенную на рисунке 7.1 зелёным цветом. Эту часть плоскости вместе с отрезками AB, BC и CA называют **треугольником**. Точки A, B и C называют **вершинами треугольника**, а отрезки AB, BC и CA — **сторонами треугольника**.

Треугольник называют и обозначают по его вершинам. Треугольник, изображённый на рисунке 7.1, обозначают так: $\triangle ABC$ (читают: «треугольник ABC»), или $\triangle BCA$ (читают: «треугольник BCA»), или $\triangle ACB$ и т. д.

Углы BAC, ABC и BCA (рис. 7.2) называют **углами треугольника** ABC.

В треугольнике ABC (рис. 7.2), например, угол B называют *углом, противолежащим стороне* AC, углы A и C — *углами, прилежащими к стороне* AC, сторону AC — *стороной, противолежащей углу* B, стороны AB и AC — *сторонами, прилежащими к углу* A.

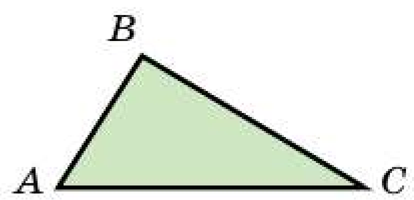


Рис. 7.1

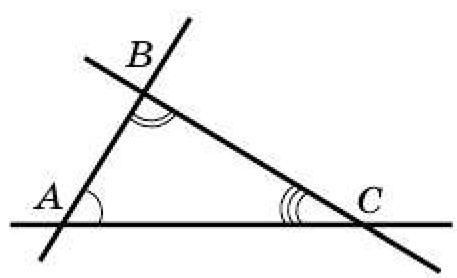


Рис. 7.2

Определение

Периметром треугольника называют сумму длин всех его сторон.

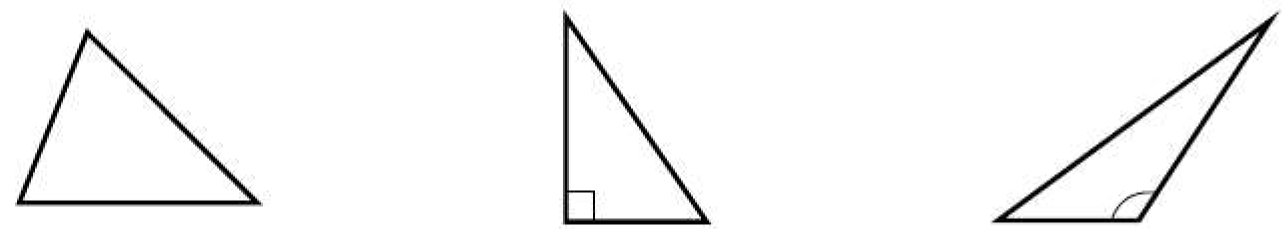
Периметр обозначают буквой P. Например, для периметра треугольника MNK используют обозначение P_{MNK}.

Определения

Треугольник называют остроугольным, если все его углы острые (рис. 7.3, *а*).

Треугольник называют прямоугольным, если один из его углов прямой (рис. 7.3, *б*).

Треугольник называют тупоугольным, если один из его углов тупой (рис. 7.3, *в*).



Остроугольный треугольник *а* | Прямоугольный треугольник *б* | Тупоугольный треугольник *в*

Рис. **7.3**

Определение

Два треугольника называют равными, если их можно совместить наложением.

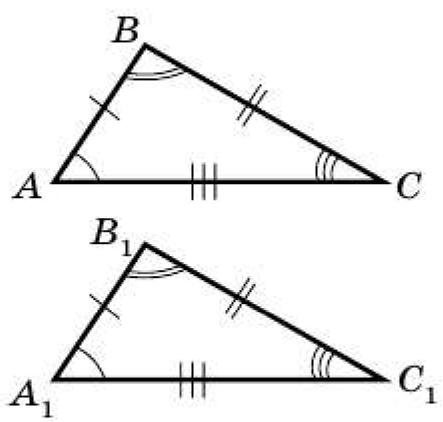


Рис. **7.4**

На рисунке 7.4 изображены равные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$. Записывают: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Эти треугольники можно совместить так, что вершины A и A_1, B и B_1, C и C_1 совпадут. Тогда можно записать: $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$.

Те стороны и те углы, которые совмещаются при наложении равных треугольников, называют **соответственными сторонами и соответственными углами**. Так, на рисунке 7.4 стороны AC и A_1C_1, углы A и A_1 — соответственные.

Обычно на рисунках равные стороны отмечают одинаковым количеством чёрточек, а равные углы — одинаковым количеством дуг (рис. 7.4).

Заметим, что *в равных треугольниках против соответственных углов лежат соответственные стороны*, и наоборот: *против соответственных сторон лежат соответственные углы*.

Вы знаете, что на любом луче от его начала можно отложить отрезок, равный данному, и притом только один, и от любого луча в данную полуплоскость можно отложить угол, равный данному, и притом только один. Похожим свойством обладают треугольники.

Основное свойство равенства треугольников

Для данного треугольника ABC и данного луча A_1M существует треугольник $A_1B_1C_1$, равный треугольнику ABC, такой, что $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$ и сторона A_1B_1 принадлежит лучу A_1M, а вершина C_1 лежит в заданной полуплоскости относительно прямой A_1M (рис. 7.5)**.**

Теорема 7.1

Через точку, не принадлежащую данной прямой, можно провести прямую, перпендикулярную данной, и притом только одну.

Доказательство

Рассмотрим прямую MN и не принадлежащую ей точку O. Сначала покажем, что через точку O можно провести прямую, перпендикулярную прямой MN.

От луча MN отложим угол O_1MN, равный углу OMN. Пусть точка O_1 такова, что $MO = MO_1$ (рис. 7.6). Точку пересечения прямых OO_1 и MN обозначим буквой A.

От луча MA отложим треугольник O_2MA, равный треугольнику OMA. Каждый из углов AMO_1 и AMO_2 равен углу AMO, поэтому углы AMO_1 и AMO_2 равны. Следовательно, очка O_2 принадлежит лучу MO_1. Кроме того, каждый из отрезков MO_1 и MO_2 равен отрезку MO. Значит, точки O_1 и O_2 совпадают. Таким образом, треугольники AMO_1 и AMO_2 совпадают. Из равенства треугольников AMO и AMO_1 следует

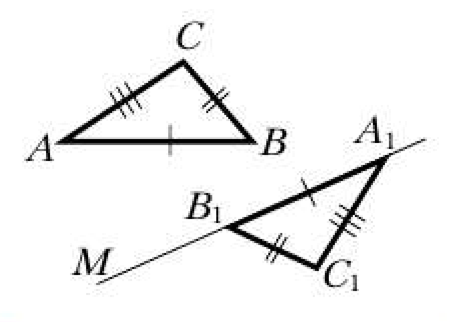


Рис. 7.5

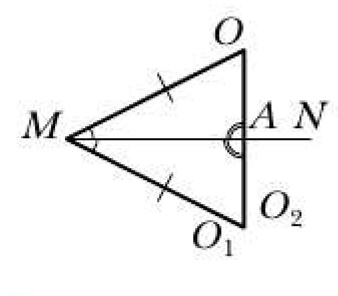


Рис. 7.6

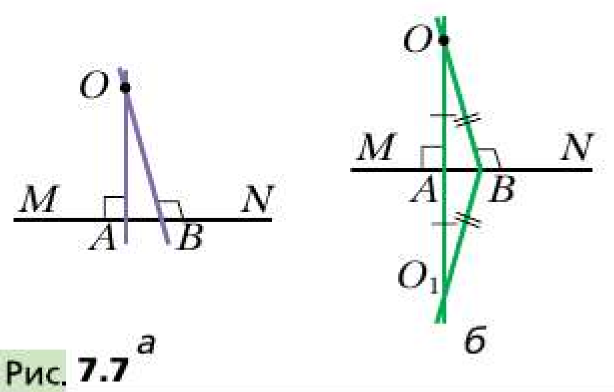


Рис. 7.7

равенство углов OAM и O_1AM. Поскольку эти углы являются смежными, то каждый из них прямой. Итак, прямая OO_1 перпендикулярна прямой MN.

Предположим, что через точку O проходят две прямые OA и OB, перпендикулярные прямой MN (рис. 7.7, *а*).

В силу основного свойства равенства треугольников существует треугольник O_1AB, равный треугольнику OAB (рис. 7.7, *б*). Тогда $\angle OAB = \angle O_1AB = 90°$. Отсюда $\angle OAO_1 = 180°$, а значит, точки O, A, O_1 лежат на одной прямой. Аналогично можно доказать, что точки O, B, O_1 также лежат на одной прямой. Но тогда прямые OA и OB имеют две точки пересечения: O и O_1. А это противоречит теореме 1.1. Следовательно, наше предположение неверно. Таким образом через точку O проходит единственная прямая, перпендикулярная прямой MN. ■

Возможно, вы заметили, что определения равных отрезков, равных углов и равных треугольников очень похожи. Поэтому целесообразно принять следующее определение равных фигур.

Определение

Две фигуры называют равными, если их можно совместить наложением.

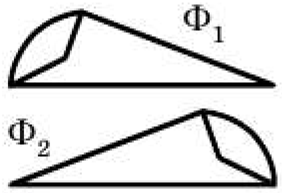


Рис. 7.8

На рисунке 7.8 изображены равные фигуры Φ_1 и Φ_2. Пишут: $\Phi_1 = \Phi_2$.

Любые две прямые (два луча, две точки) равны.

Определение

Перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на прямую, содержащую противолежащую сторону, называют высотой треугольника.

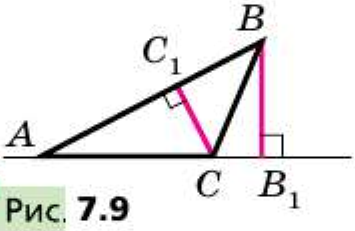


Рис. 7.9

На рисунке 7.9 отрезки BB_1 и CC_1 — высоты треугольника ABC.

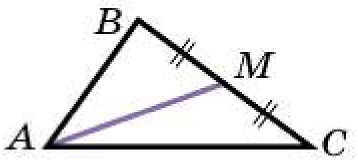


Рис. 7.10

Определение

Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны, называют медианой треугольника.

На рисунке 7.10 отрезок AM — медиана треугольника ABC.

Определение

Отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противолежащей стороны, называют биссектрисой треугольника.

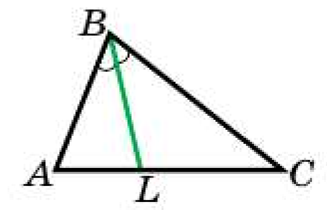


Рис. 7.11

На рисунке 7.11 отрезок BL — биссектриса треугольника ABC.

Каждый треугольник имеет три высоты, три медианы и три биссектрисы.

Часто длины сторон треугольника, противолежащих углам A, B, C, обозначают соответственно a, b, c. Длины высот обозначают h_a, h_b, h_c, медиан — m_a, m_b, m_c, биссектрис — l_a, l_b, l_c. Индекс показывает, к какой стороне проведён отрезок (рис. 7.12).

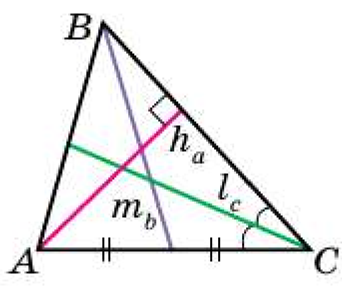


Рис. 7.12

1. Как называют и обозначают треугольник?
2. Что называют периметром треугольника?
3. Какой треугольник называют прямоугольным? Тупоугольным? Остроугольным?
4. Какие два треугольника называют равными?
5. Как называют те пары сторон и пары углов равных треугольников, которые совмещаются при наложении?
6. Какие две фигуры называют равными?
7. Что называют высотой треугольника? Медианой треугольника? Биссектрисой треугольника?

Практические задания

7.1. Начертите треугольник:
1) остроугольный;
2) прямоугольный;
3) тупоугольный.

Проведите из каждой вершины треугольника высоту.

7.2. Перерисуйте в тетрадь рисунок 7.13, проведите высоту, общую для трёх изображённых треугольников. У какого из них эта высота расположена вне треугольника?

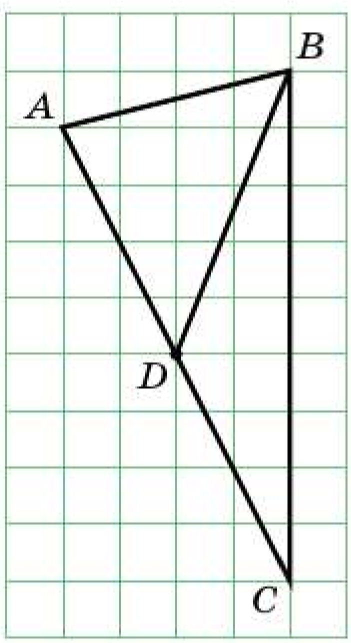


Рис. 7.13

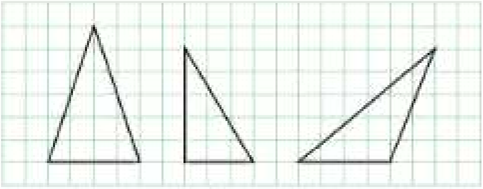


Рис. 7.14 а б в

7.3. Перерисуйте в тетрадь треугольники, изображённые на рисунке 7.14, проведите в каждом из них все высоты.

7.4. Начертите произвольный треугольник и проведите все его медианы.

7.5. Начертите произвольный треугольник и проведите все его биссектрисы.

Упражнения

7.6. Начертите произвольный треугольник, обозначьте его вершины буквами M, K и E. Укажите:
1) сторону, противолежащую углу M;
2) угол, противолежащий стороне MK;
3) стороны, прилежащие к углу K;
4) углы, прилежащие к стороне KE.

7.7. Запишите стороны, вершины, углы треугольника CEF (рис. 7.15). Укажите:
1) угол, противолежащий стороне CF;
2) углы, прилежащие к стороне CE;
3) сторону, противолежащую углу E;
4) стороны, прилежащие к углу F.

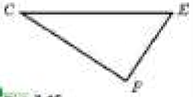


Рис. 7.15

7.8. Одна из сторон треугольника в 5 раз меньше второй и на 25 см меньше третьей. Найдите стороны треугольника, если его периметр равен 74 см.

7.9. Стороны треугольника относятся как 5 : 7 : 11, а сумма наибольшей и наименьшей сторон равна 80 см. Вычислите периметр треугольника.

7.10. Периметр треугольника равен 48 см, а его стороны относятся как 7 : 9 : 8. Найдите стороны треугольника.

7.11. Треугольники APK и MCE равны, углы A и C соответственные, $PK = 10$ см. Найдите сторону ME.

7.12. Треугольники ABC и DEF равны, стороны AB и DE, BC и DF соответственные, $\angle B = 32°$. Найдите угол D.

7.13. Треугольники ABC и KTM равны, углы A и M, B и K соответственные, $\angle C = 40°$, $MK = 5$ см. Найдите угол T и сторону AB.

7.14. Верно ли утверждение:

1) если треугольники равны, то их периметры также равны;

2) если периметры двух треугольников равны, то и сами треугольники равны?

7.15. Какие из элементов треугольника — биссектриса, медиана, высота — всегда принадлежат треугольнику?

7.16. Какой из элементов треугольника — биссектриса, медиана, высота — может совпадать с его стороной? Укажите вид треугольника, для которого это возможно.

7.17. 1) Может ли одна высота треугольника принадлежать ему, а две другие — нет?

2) Может ли только одна высота треугольника совпадать с его стороной?

3) В каком треугольнике три высоты пересекаются в его вершине?

7.18. Медиана BD треугольника ABC разбивает его на два треугольника, периметры которых равны 32 см и 36 см. Найдите периметр треугольника ABC, если $BD = 10$ см.

7.19. Медиана треугольника, периметр которого равен 60 см, разбивает его на два треугольника, периметры которых равны 36 см и 50 см. Чему равна длина этой медианы?

§ 8 Первый и второй признаки равенства треугольников

Если для треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ выполняются шесть условий: $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$, то очевидно, что эти треугольники совпадут при наложении. Значит, они равны.

Попробуем уменьшить количество условий. Например, оставим лишь два равенства: $AB = A_1B_1$ и $BC = B_1C_1$. В этом случае треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ могут оказаться неравными (рис. 8.1).

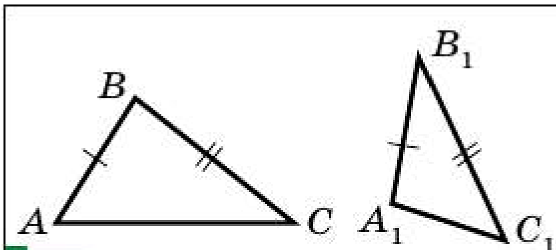


Рис. 8.1

Как же сократить список требований до минимума, но при этом сохранить равенство треугольников? На этот вопрос отвечают теоремы, которые называют **признаками равенства треугольников**.

Теорема 8.1

(первый признак равенства треугольников: по двум сторонам и углу между ними)

Если две стороны и угол между ними одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство

Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$ (рис. 8.2). Докажем, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

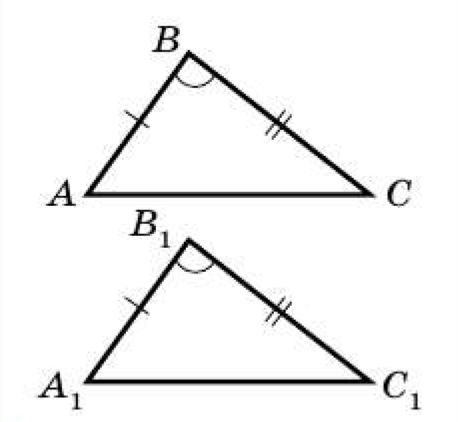


Рис. 8.2

Наложим треугольник ABC на треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы луч BA совместился с лучом B_1A_1, а луч BC совместился с лучом B_1C_1. Это можно сделать, так как по условию $\angle B = \angle B_1$. Поскольку по условию $BA = B_1A_1$ и $BC = B_1C_1$, то при таком наложении сторона BA совместится со стороной B_1A_1, а сторона BC — со стороной B_1C_1. Следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ полностью совместятся, значит, они равны. ■

Определение

Прямую, перпендикулярную отрезку и проходящую через его середину, называют серединным перпендикуляром отрезка.

На рисунке 8.3 прямая a — серединный перпендикуляр отрезка AB. Заметим, что точки A и B равноудалены от прямой a.

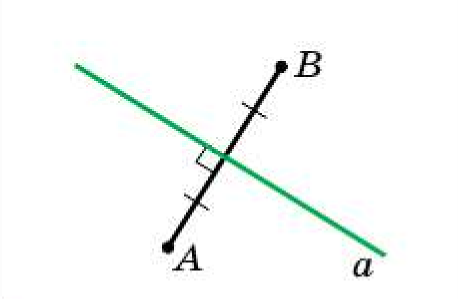


Рис. 8.3

Теорема 8.2

Каждая точка серединного перпендикуляра отрезка равноудалена от концов этого отрезка.

Доказательство

Пусть X — произвольная точка серединного перпендикуляра a отрезка AB. Надо доказать, что $XA = XB$.

Пусть точка M — середина отрезка AB. Если точка X совпадает с точкой M (а это возможно, так как X — произвольная точка прямой a), то $XA = XB$.

Если точки X и M не совпадают, то рассмотрим треугольники AXM и BXM (рис. 8.4). В этих треугольниках $AM = MB$, так как точка M — середина отрезка AB, сторона XM общая, $\angle AMX = \angle BMX = 90°$. Следовательно, треугольники AXM и BXM равны по двум сторонам и углу между ними, т. е. по первому признаку равенства треугольников. Значит, отрезки XA и XB равны как соответственные стороны равных треугольников. ■

Теорема 8.3

(второй признак равенства треугольников: по стороне и двум прилежащим к ней углам)

Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника равны соответственно стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство

Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$ (рис. 8.5). Докажем, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Наложим треугольник ABC на треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы точка A совместилась с точкой A_1, отрезок AC — с отрезком A_1C_1 (это возможно, так как $AC = A_1C_1$) и точки B и B_1 лежали в одной полуплоскости относительно прямой A_1C_1. Поскольку $\angle A = \angle A_1$ и $\angle C = \angle C_1$, то луч AB совместится с лучом A_1B_1, а луч CB — с лучом C_1B_1. Тогда точка B — общая точка лучей AB и CB — совместится с точкой B_1 — общей точкой лучей A_1B_1 и C_1B_1. Значит, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ полностью совместятся, следовательно, они равны. ■

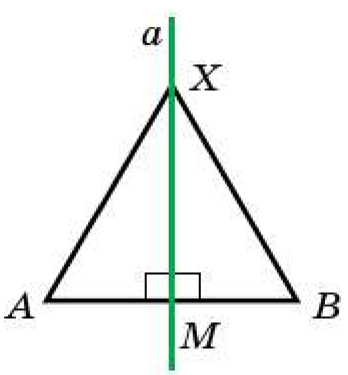


Рис. **8.4**

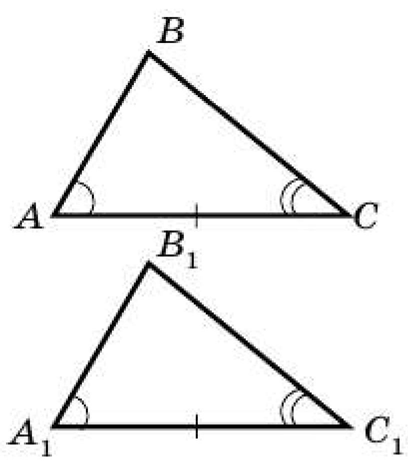


Рис. **8.5**

Задача. На рисунке 8.6 точка O — середина отрезка BD, $\angle ABO = \angle CDO$. Докажите, что $BC = AD$.

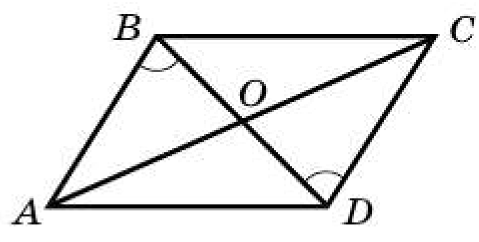


Рис. 8.6

Решение. Рассмотрим треугольники AOB и COD. Так как точка O — середина отрезка BD, то $BO = OD$. По условию $\angle ABO = \angle CDO$. Углы AOB и COD равны как вертикальные. Следовательно, $\triangle AOB = \triangle COD$ по стороне и двум прилежащим углам, т. е. по второму признаку равенства треугольников. Отсюда $AB = CD$ как соответственные стороны равных треугольников. Заметим, что отрезок BD — общая сторона треугольников ABD и CDB. Также по условию $\angle ABD = \angle CDB$. Следовательно, треугольники ABD и CDB равны по двум сторонам и углу между ними, т. е. по первому признаку равенства треугольников. Тогда $BC = AD$. ■

?

1. Сформулируйте первый признак равенства треугольников.

2. Какую прямую называют серединным перпендикуляром отрезка?

3. Каким свойством обладают точки серединного перпендикуляра отрезка?

4. Сформулируйте второй признак равенства треугольников.

Практические задания

8.1. С помощью линейки и транспортира постройте треугольник, две стороны которого равны 3 см и 6 см, а угол между ними — 40°.

8.2. С помощью линейки и транспортира постройте треугольник, две стороны которого равны 3 см и 4 см, а угол между ними — 90°. Укажите вид этого треугольника.

8.3. С помощью линейки и транспортира постройте треугольник, одна сторона которого равна 3 см, а углы, прилежащие к этой стороне, — 100° и 20°. Укажите вид этого треугольника.

8.4. С помощью линейки и транспортира постройте треугольник, одна сторона которого равна 6 см, а углы, прилежащие к этой стороне, — 90° и 45°.

8.5. Перерисуйте в тетрадь рисунок 8.7. С помощью угольника и линейки найдите на прямой l точку, равно-

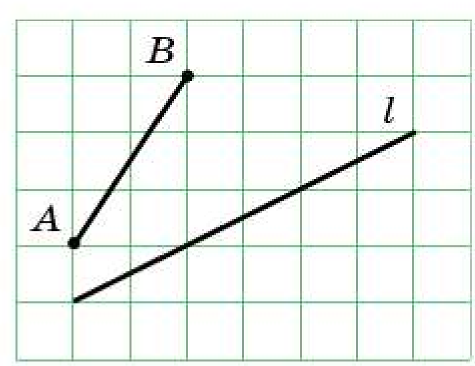


Рис. 8.7

удалённую от концов отрезка AB.

8.6. Перерисуйте в тетрадь рисунок 8.8. С помощью угольника и линейки найдите точку, которая равноудалена от точек A и B и в то же время равноудалена от точек C и D.

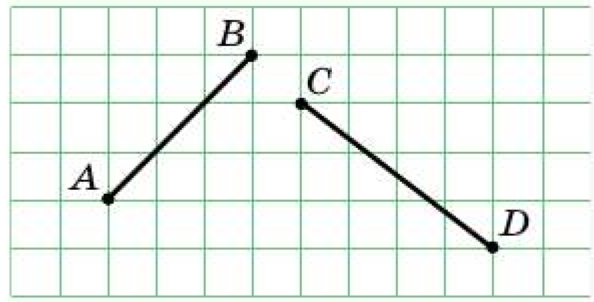


Рис. 8.8

Упражнения

8.7. На рисунке 8.9 $AC = DC$, $BC = EC$. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle DEC$.

8.8. На рисунке 8.10 $AB = AD$, $\angle BAC = \angle DAC$. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle ADC$.

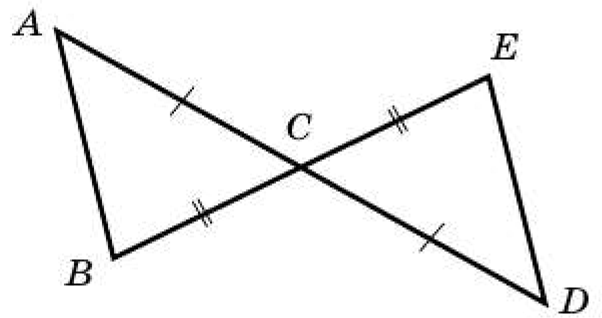


Рис. 8.9

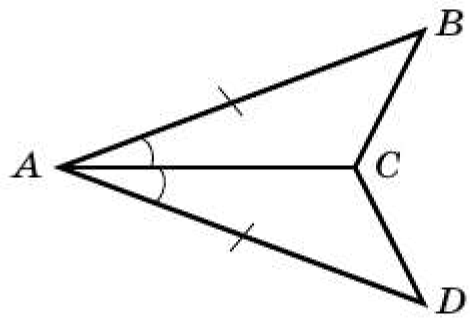


Рис. 8.10

8.9. На рисунке 8.11 $AB = CD$, $\angle 1 = \angle 2$, $AD = 7$ см, $\angle C = 34°$. Найдите отрезок BC и угол A.

8.10. На рисунке 8.12 $AO = OD$, $BO = OC$. Найдите сторону CD и угол OCD треугольника OCD, если $AB = 8$ см, $\angle OBA = 43°$.

8.11. Дано: $OA = OC$, $OB = OD$ (рис. 8.13). Докажите, что $\angle OAD = \angle OCB$.

8.12. Из точек A и B, лежащих в одной полуплоскости относительно прямой a на одинаковом расстоянии от неё, опущены на эту прямую перпендикуляры AC и BD. Найдите угол ACB, если $\angle ADC = 25°$.

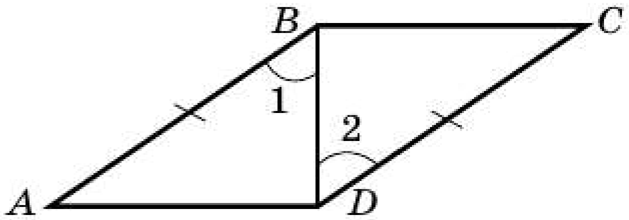


Рис. 8.11

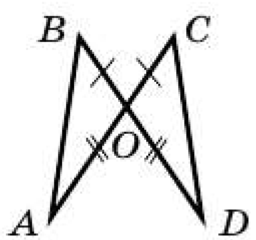


Рис. 8.12

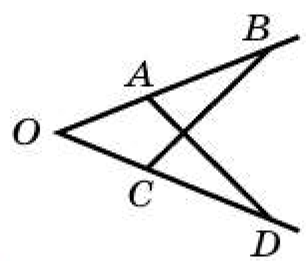


Рис. 8.13

8.13. Отрезки AD и BC пересекаются в точке O и делятся этой точкой пополам. Найдите угол ACD, если $\angle ABC = 64°$, $\angle ACO = 56°$.

8.14. На рисунке 8.14 $AB \perp BD$, $CD \perp BD$, точка O — середина отрезка BD. Докажите, что $\triangle ABO = \triangle CDO$.

8.15. На рисунке 8.15 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, $AB = 8$ см, $BC = 6$ см. Найдите стороны AD и CD треугольника ADC.

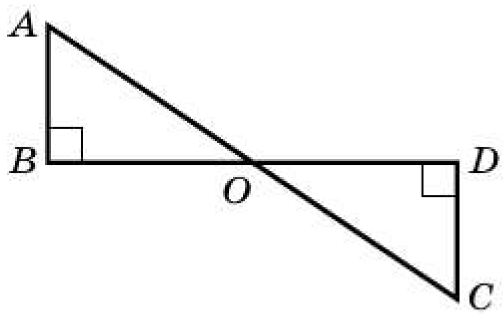


Рис. **8.14**

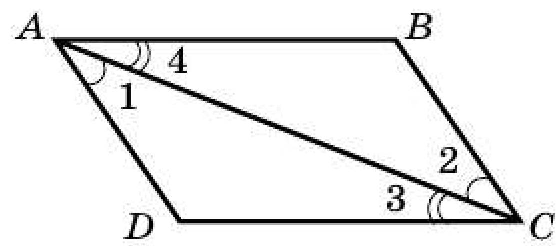


Рис. **8.15**

8.16. На рисунке 8.16 $\angle ABC = \angle DEF$, $BO = OE$. Докажите, что $\triangle BCO = \triangle EFO$.

8.17. На рисунке 8.17 $\angle BAO = \angle DCO$, $\angle BAC = \angle DCA$. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle CDA$.

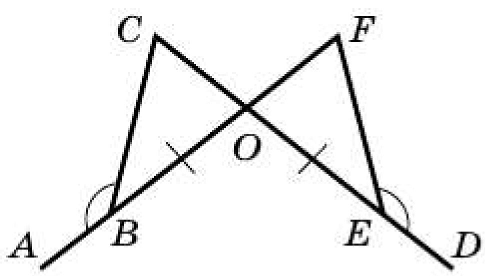


Рис. **8.16**

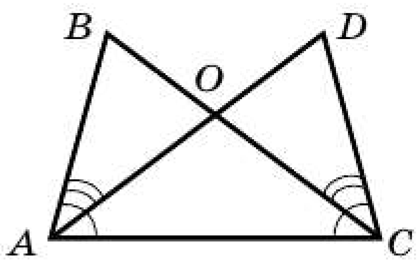


Рис. **8.17**

8.18. На сторонах угла с вершиной в точке B отмечены точки A и C, а на его биссектрисе — точка D так, что $\angle ADB = \angle CDB$. Докажите, что $AB = BC$.

8.19. Через точку M, принадлежащую биссектрисе угла с вершиной в точке O, провели прямую, перпендикулярную этой биссектрисе. Эта прямая пересекает стороны данного угла в точках A и B. Докажите, что $AM = MB$.

8.20. На рисунке 8.18 $\triangle ABC = \triangle ADC$. Докажите, что $\triangle ABK = \triangle ADK$.

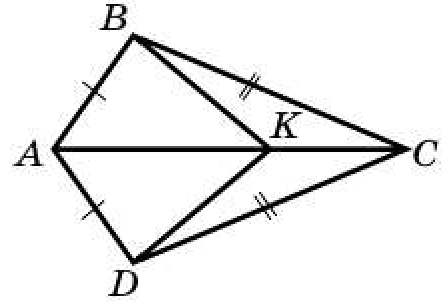


Рис. **8.18**

8.21. На рисунке 8.19 $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, $\angle DBC = \angle D_1B_1C_1$. Докажите, что $\triangle DBC = \triangle D_1B_1C_1$.

8.22. На рисунке 8.20 $\triangle MKO = \triangle MPO$. Докажите, что $\triangle KOE = \triangle POE$.

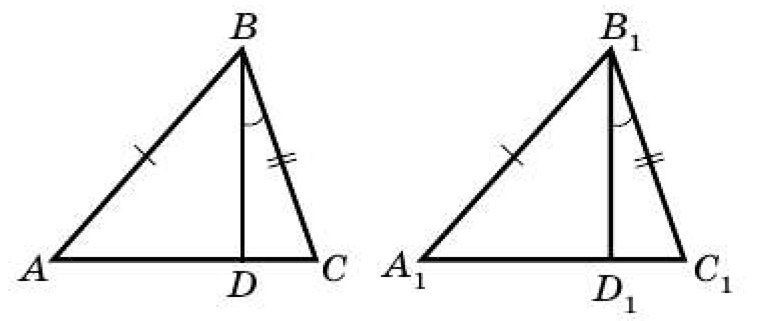


Рис. **8.19**

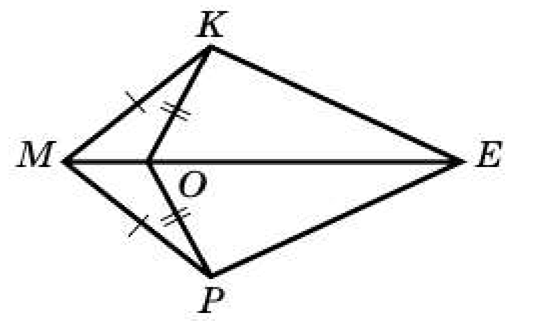


Рис. **8.20**

8.23. На рисунке 8.21 $BM \perp AD$, $CK \perp AD$, $BM = CK$, $AM = KD$. Докажите, что $\triangle ABD = \triangle CDA$.

8.24. Докажите, что биссектрисы равных треугольников, проведённые из вершин соответственных углов, равны.

8.25. Докажите, что в равных треугольниках медианы, проведённые к соответственным сторонам, равны.

8.26. На продолжении медианы AM треугольника ABC за точку M отложен отрезок MK, равный отрезку AM. Найдите расстояние от точки K до вершины C, если $AB = 6$ см.

8.27. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O и делятся точкой пересечения пополам. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle BAD$.

8.28. На рисунке 8.22 прямые m и n — серединные перпендикуляры сторон AB и AC треугольника ABC. Докажите, что точка O равноудалена от всех вершин данного треугольника.

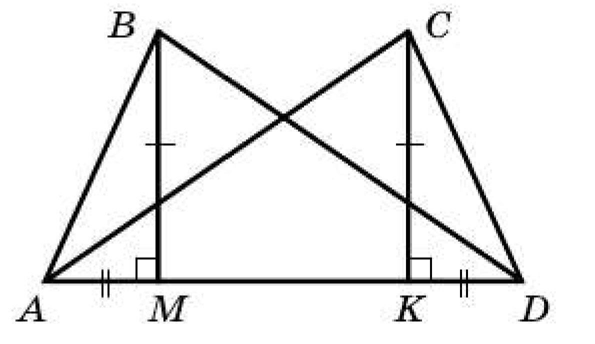


Рис. **8.21**

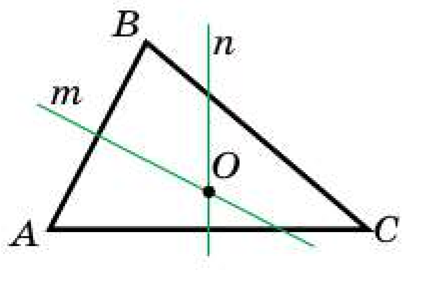


Рис. **8.22**

8.29. Для нахождения расстояния от точки B до колокольни A, расположенной на другом берегу реки (рис. 8.23), с помощью вешек, рулетки и астролябии отметили на местности точки C, D и E так, что точки B, C и D лежат на одной прямой, причём точка C является серединой отрезка BD. Затем наметили прямую AE, проходящую через точку C, причём $\angle ABC = \angle CDE$. Потом, измерив одну из сторон треугольника CDE, определили расстояние от точки B до точки A. Какую сторону измерили? Ответ обоснуйте[1].

8.30. Для определения ширины озера (рис. 8.24) на его берегу отметили точки A и B, а потом ещё точки C, D и O так, чтобы точка O была общей серединой отрезков AC и BD. Как можно определить ширину озера? Ответ обоснуйте.

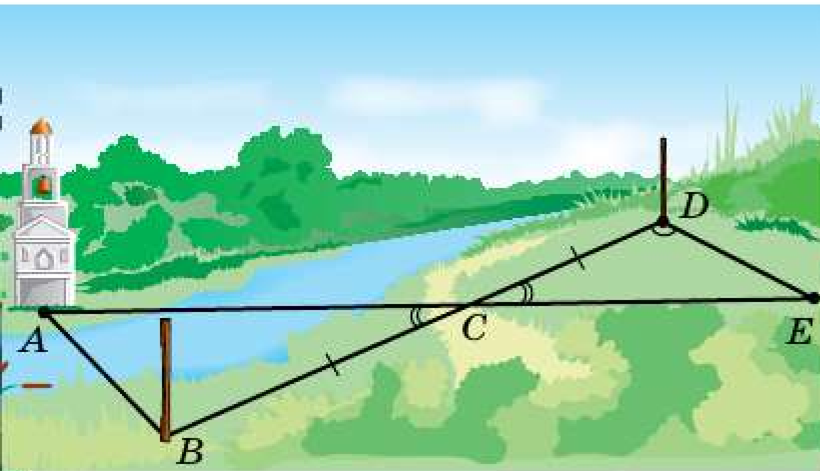


Рис. **8.23**

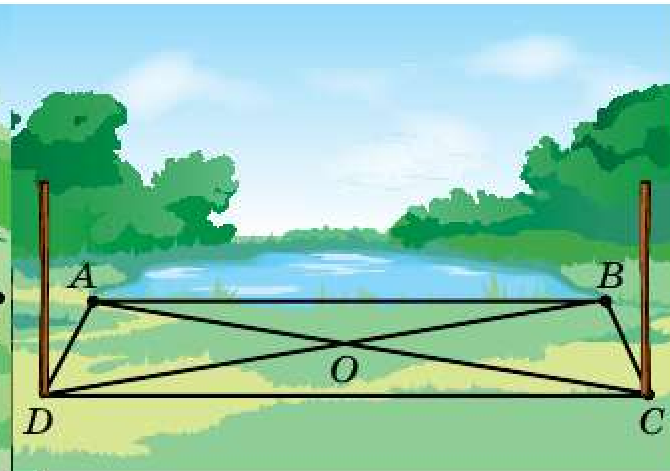


Рис. **8.24**

8.31. Докажите равенство двух треугольников по стороне, медиане, проведённой к этой стороне, и углу между этой стороной и медианой.

8.32. Докажите равенство двух треугольников по стороне, прилежащему к ней углу и биссектрисе треугольника, проведённой из вершины этого угла.

8.33. Докажите равенство двух треугольников по биссектрисе, углу, из вершины которого проведена эта биссектриса, и углу, образованному биссектрисой со стороной, к которой она проведена.

8.34. Серединный перпендикуляр стороны BC треугольника ABC пересекает сторону AB в точке D. Найдите отрезок AD, если $CD = 4$ см, $AB = 7$ см.

8.35. Серединный перпендикуляр стороны AB треугольника ABC пересекает сторону BC в точке M. Найдите сторону AC треугольника ABC, если $BC = 16$ см, а периметр треугольника AMC равен 26 см.

---

[1] Узнать подробнее о методах и приборах, которые используют при измерениях на местности, вы сможете, приняв участие в проектной работе «Построения на местности с помощью специальных приборов и инструментов» (см. с. 191).

8.36. На рисунке 8.25 $OA = OD$. Добавьте ещё одно условие так, чтобы треугольники AOC и DOB оказались равными:
1) по первому признаку равенства треугольников;
2) по второму признаку равенства треугольников.

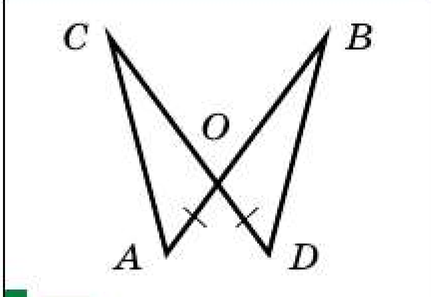


Рис. 8.25

8.37. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O и делятся этой точкой пополам. На отрезке AC отмечена точка M, а на отрезке BD — точка K так, что $AM = BK$. Докажите, что: 1) $OM = OK$; 2) точки M, O и K лежат на одной прямой.

8.38. Равные отрезки AB и CD пересекаются в точке O так, что $OA = OC$. Прямые AD и BC пересекаются в точке M. Докажите, что $MD = MB$.

8.39. На одной стороне угла с вершиной в точке O (рис. 8.26) отмечены точки A и B, а на другой — точки C и D так, что $OA = OC$, $AB = CD$. Докажите, что луч OM является биссектрисой угла BOD, где M — точка пересечения отрезков AD и BC.

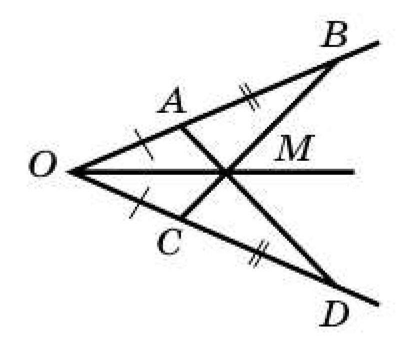


Рис. 8.26

8.40. На сторонах острого угла A отмечены точки B и C так, что $AB = AC$. Как с помощью угольника построить биссектрису угла A?

8.41. Докажите равенство двух треугольников по медиане и углам, на которые эта медиана делит угол треугольника.

8.42. Можно ли утверждать, что треугольники равны по двум сторонам и углу?

8.43. Можно ли утверждать, что треугольники равны по двум сторонам и высоте, проведённой к третьей стороне?

8.44. Докажите, что на рисунке 8.27 угол BAC прямой.

8.45. На стороне AC треугольника ABC отметили точки M и N так, что $AM = MN$, $BC = 2BM$ и BN — биссектриса угла MBC. Докажите, что $AB = NC$.

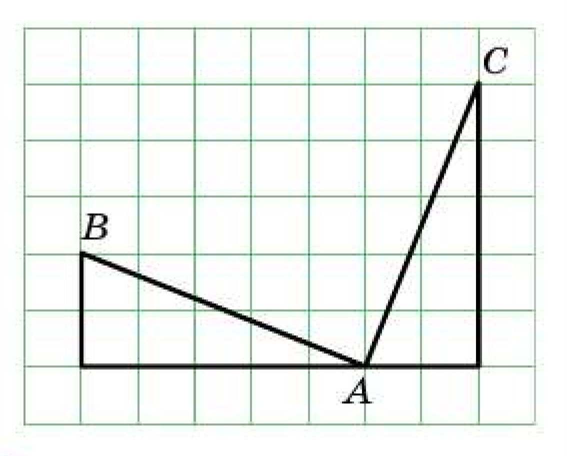


Рис. 8.27

8.46. На медиане CM треугольника ABC отметили точки K и E так, что $\angle AKM = 90°$ и $CE = 2MK$. Докажите, что $BE = AC$.

8.47. На медиане AM треугольника ABC отметили точки K и L так, что $AK = 2LM$, $\angle ALC = 90°$. Докажите, что $\angle BKM = \angle CAM$.

8.48. В треугольнике ABC точка D лежит на стороне AC. Биссектриса CE треугольника ABC пересекает отрезок BD в точке O. Известно, что $OD = OE$, $\angle DOE = 120°$. Докажите, что BD — биссектриса треугольника ABC.

§ 9 Равнобедренный треугольник и его свойства

Определение

Треугольник, у которого две стороны равны, называют равнобедренным.

На рисунке 9.1 изображён равнобедренный треугольник ABC, у которого $AB = BC$.

Равные стороны равнобедренного треугольника называют **боковыми сторонами**, а третью сторону — **основанием** равнобедренного треугольника.

Вершиной равнобедренного треугольника называют общую точку его боковых сторон (точка B на рисунке 9.1). При этом угол B называют **углом при вершине**, а углы A и C — **углами при основании** равнобедренного треугольника.

Рис. 9.1

Определение

Треугольник, у которого все стороны равны, называют равносторонним.

На рисунке 9.2 изображён равносторонний треугольник ABC. Равносторонний треугольник — частный случай равнобедренного треугольника.

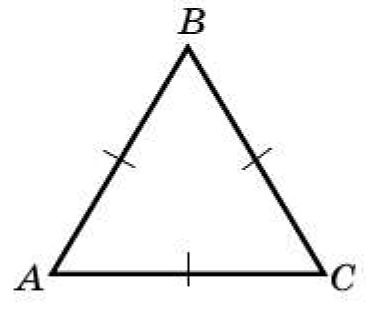


Рис. 9.2

Следующая теорема выражает свойства равнобедренного треугольника.

Теорема 9.1

В равнобедренном треугольнике: 1) углы при основании равны; 2) биссектриса треугольника, проведённая к его основанию, является медианой и высотой треугольника.

Доказательство

Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC, у которого $AB = BC$, отрезок BL — его биссектриса (рис. 9.3). Требуется доказать, что $\angle A = \angle C$, $AL = LC$, $BL \perp AC$.

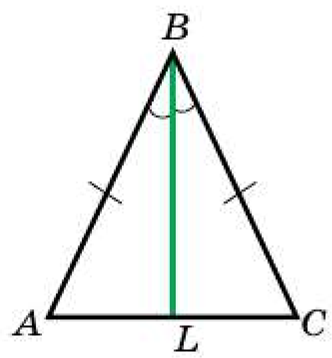


Рис. 9.3

В треугольниках ABL и CBL сторона BL — общая, $\angle ABL = \angle CBL$, так как по условию луч BL — биссектриса угла ABC, стороны AB и BC равны как боковые стороны равнобедренного треугольника. Следовательно, $\triangle ABL = \triangle CBL$ по первому признаку равенства треугольников. Отсюда можно сделать такие выводы: 1) $\angle A = \angle C$; 2) $AL = LC$; 3) $\angle ALB = \angle CLB$.

Так как отрезки AL и LC равны, то отрезок BL — медиана треугольника ABC.

Углы ALB и CLB смежные, следовательно, $\angle ALB + \angle CLB = 180°$. Учитывая, что $\angle ALB = \angle CLB$, получаем: $\angle ALB = \angle CLB = 90°$. Значит, отрезок BL — высота треугольника ABC. ■

Из теоремы 9.1 следует, что:

1) ***в треугольнике против равных сторон лежат равные углы***;

2) ***в равнобедренном треугольнике биссектриса, высота и медиана, проведённые к его основанию, совпадают***;

3) ***в равностороннем треугольнике все углы равны***;

4) ***в равностороннем треугольнике биссектриса, высота и медиана, проведённые из одной вершины, совпадают.***

Определение

Если в треугольнике длины всех сторон различны, то такой треугольник называют разносторонним.

Задача. Отрезок AD — медиана равнобедренного треугольника ABC, проведённая к основанию. На сторонах AB и AC отмечены соответственно точки M и K так, что $BM = CK$. Докажите равенство треугольников AMD и AKD.

Решение. Точка M принадлежит отрезку AB, а точка K — отрезку AC, следовательно, $AB = AM + BM$, $AC = AK + CK$ (рис. 9.4).

Поскольку $AB = AC$ и $BM = CK$, то $AM = AK$.

Углы BAD и CAD равны, поскольку медиана равнобедренного треугольника, проведённая к основанию, является его биссектрисой.

Заметим, что отрезок AD — общая сторона треугольников AMD и AKD.

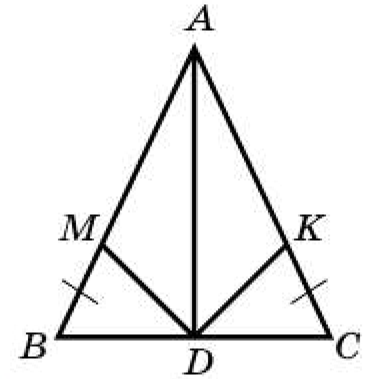


Рис. 9.4

Следовательно, треугольники AMD и AKD равны по двум сторонам и углу между ними, т. е. по первому признаку равенства треугольников. ■

1. Какие существуют виды треугольников в зависимости от количества равных сторон?
2. Какой треугольник называют равнобедренным? Равносторонним? Разносторонним?
3. Какие стороны равнобедренного треугольника называют боковыми?
4. Какую сторону равнобедренного треугольника называют основанием?
5. Сформулируйте свойство углов равнобедренного треугольника.
6. Сформулируйте свойство биссектрисы равнобедренного треугольника, проведённой к основанию.
7. Каким свойством обладают углы треугольника, лежащие против его равных сторон?
8. Сформулируйте свойство углов равностороннего треугольника.
9. Каким свойством обладают биссектриса, высота и медиана равностороннего треугольника, проведённые из одной вершины?

Практические задания

9.1. Начертите:
1) разносторонний остроугольный треугольник;
2) равнобедренный прямоугольный треугольник;
3) равнобедренный тупоугольный треугольник.

9.2. Начертите:
1) разносторонний прямоугольный треугольник;
2) разносторонний тупоугольный треугольник.

9.3. Начертите равнобедренный треугольник с боковой стороной, равной 3 см, так, чтобы его угол при вершине был: 1) острым; 2) прямым; 3) тупым. В построенных треугольниках проведите высоты к боковым сторонам.

Упражнения

9.4. 1) Найдите периметр равнобедренного треугольника, основание которого равно 13 см, а боковая сторона — 8 см.
2) Периметр равнобедренного треугольника равен 39 см, а основание — 15 см. Найдите боковые стороны треугольника.

9.5. Периметр равнобедренного треугольника равен 28 см, а боковая сторона — 10 см. Найдите основание треугольника.

9.6. Найдите стороны равнобедренного треугольника, периметр которого равен 32 см, а основание на 5 см больше боковой стороны.

9.7. Найдите стороны равнобедренного треугольника, периметр которого равен 54 см, а основание в 4 раза меньше боковой стороны.

9.8. В равнобедренном треугольнике ABC сторона AC — основание, $\angle BCA = 40^\circ$, $\angle ABC = 100^\circ$, отрезок BD — медиана. Найдите углы треугольника ABD.

9.9. На рисунке 9.5 $AB = BC$, отрезок BD — медиана треугольника ABC, $\angle ABD = 53^\circ$. Найдите углы ABC и ADE.

9.10. На рисунке 9.6 $MK = KE$, $OE = 6$ см, $\angle MKE = 48^\circ$, $\angle POE = 90^\circ$. Найдите сторону ME и угол MKO.

9.11. На рисунке 9.7 $AB = BC$, $\angle 1 = 140^\circ$. Найдите угол 2.

9.12. Угол, вертикальный углу при вершине равнобедренного треугольника, равен 68°. Найдите угол между боковой стороной треугольника и медианой, проведённой к основанию.

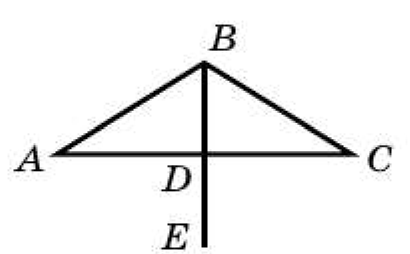


Рис. 9.5

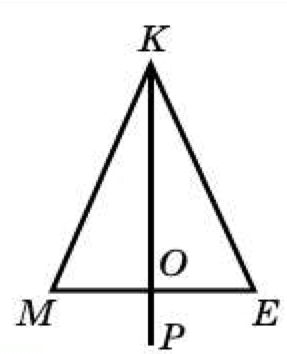


Рис. 9.6

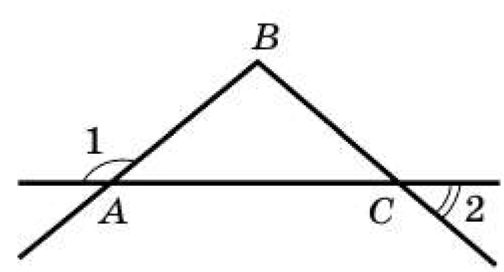


Рис. 9.7

9.13. Угол, смежный с углом при вершине равнобедренного треугольника, равен 76°. Найдите угол между боковой стороной треугольника и высотой, опущенной на основание.

9.14. На рисунке 9.8 $AB = BC$, $DC = DE$. Докажите, что $\angle A = \angle E$.

9.15. Прямая пересекает стороны угла A в точках B и C так, что $AB = AC$ (рис. 9.9). Докажите, что $\angle 1 = \angle 2$.

9.16. На рисунке 9.10 $AO = CO$, $\angle AOB = \angle COB$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

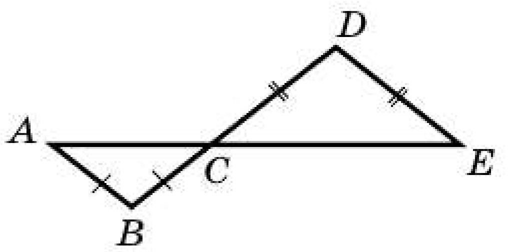


Рис. 9.8

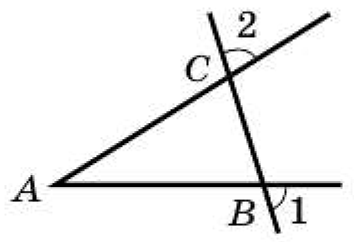


Рис. 9.9

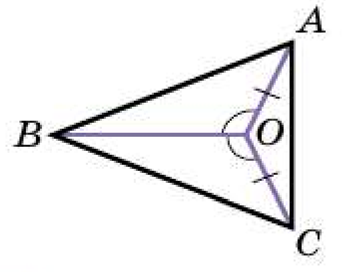


Рис. 9.10

9.17. Треугольник ABC — равнобедренный с основанием AC, отрезок BD — его биссектриса, отрезок DM — биссектриса треугольника BDC. Найдите угол ADM.

9.18. Один ученик утверждает, что некоторый треугольник равнобедренный, а другой ученик — что этот треугольник равносторонний.

1) Могут ли оба ученика быть правыми?

2) В каком случае прав только один ученик и какой именно?

9.19. Используя признаки равенства треугольников, докажите признак равенства равнобедренных треугольников по боковой стороне и углу при вершине.

9.20. Известно, что треугольники ABC и ADC равнобедренные и прямоугольные. Следует ли отсюда, что $\angle ABC = \angle ADC$?

9.21. Используя признаки равенства треугольников, докажите признак равенства равнобедренных треугольников по основанию и прилежащему к нему углу.

9.22. На основании AC равнобедренного треугольника ABC отмечены точки M и K так, что точка M лежит между точками A и K, причём $AM = CK$. Докажите, что треугольник MBK равнобедренный.

9.23. В треугольнике MKE $MK = ME$. На стороне KE отмечены точки F и N так, что точка N лежит между точками F и E, причём $\angle KMF = \angle EMN$. Докажите, что $\angle MFN = \angle MNF$.

9.24. На боковых сторонах CA и CB равнобедренного треугольника ABC отложены соответственно равные отрезки CK и CM. Докажите, что: 1) $\triangle AMC = \triangle BKC$; 2) $\triangle AMB = \triangle BKA$.

9.25. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC на медиане BD отметили произвольную точку M. Докажите, что: 1) $\triangle AMB = \triangle CMB$; 2) $\triangle AMD = \triangle CMD$.

9.26. Все звенья ломаной $ABCDE$ равны, причём $\angle ABC = \angle CDE$ (рис. 9.11). Докажите, что середина отрезка BD равноудалена от точек A и E.

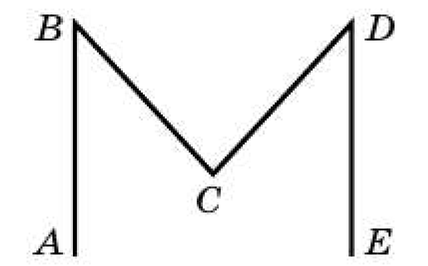


Рис. 9.11

9.27. Докажите, что биссектрисы равнобедренного треугольника, проведённые из вершин углов при основании, равны.

9.28. Докажите, что медианы равнобедренного треугольника, проведённые к боковым сторонам, равны.

9.29. Докажите, что середины сторон равнобедренного треугольника являются вершинами равнобедренного треугольника.

9.30. Найдите третью сторону равнобедренного треугольника, если две другие его стороны равны 7 см и 4 см. Сколько решений имеет задача?

9.31. Одна из сторон равнобедренного треугольника равна 4 см. Найдите две другие стороны, если периметр треугольника равен 14 см.

9.32. Верно ли утверждение:

1) биссектриса равнобедренного треугольника является его высотой и медианой;

2) биссектриса равностороннего треугольника является его высотой и медианой;

3) если периметр треугольника в 3 раза больше одной из его сторон, то этот треугольник равносторонний?

9.33. Точки A, B, C и D лежат на одной прямой, причём отрезки AB и CD имеют общую середину. Точка E такова, что треугольник AEB — равнобедренный с основанием AB. Докажите, что треугольник CED — равнобедренный с основанием CD.

9.34. Точки A, B, C и D лежат на одной прямой. Точка E такова, что треугольники AEB и CED — равнобедренные с основаниями AB и CD соответственно. Докажите, что отрезки AB и CD имеют общую середину.

9.35. На сторонах равностороннего треугольника ABC (рис. 9.12) отметили точки M, K и D так, что $AD = BM = CK$. Докажите, что треугольник MKD равносторонний.

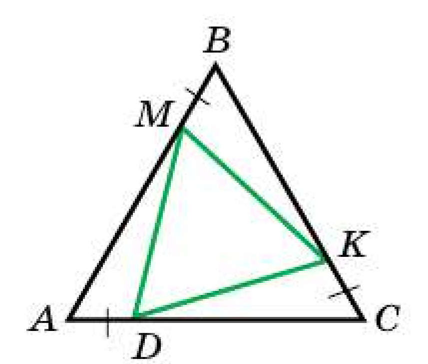


Рис. 9.12

9.36. На продолжениях сторон AB, BC и AC равностороннего треугольника ABC (рис. 9.13) за точки A, B и C соответственно отложили равные отрезки AD, BK и CE. Докажите, что треугольник DEK равносторонний.

9.37. Треугольник DKE равносторонний и $\angle KDB = \angle DEA = \angle EKC$ (рис. 9.13). Докажите, что треугольник ABC равносторонний.

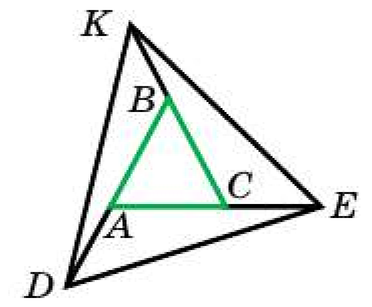


Рис. 9.13

9.38. Основание равнобедренного треугольника равно 20 см, а его медиана разбивает данный треугольник на два треугольника так, что периметр одного из них на 6 см меньше периметра другого. Найдите боковую сторону данного треугольника. Сколько решений имеет задача?

9.39. Точка D — середина основания AC равнобедренного треугольника ABC. На сторонах AB и BC соответственно отметили точки M и N так, что $\angle MDA = \angle NDC$. Докажите, что $AN = CM$.

9.40. На стороне AC треугольника ABC отметили точки M и N так, что $AB = AM$ и $CB = CN$ (рис. 9.14). Докажите, что если $BM = BN$, то треугольник ABC равнобедренный.

9.41. На основании AC равнобедренного треугольника ABC отметили точки M и N так, что $AB = AM$ и $CB = CN$ (рис. 9.14). Докажите, что $BM = BN$.

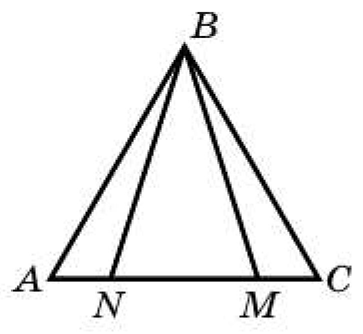


Рис. 9.14

9.42. В равнобедренных треугольниках ABM и ABN отрезок AB является основанием. Известно, что $\angle ANB = 100°$. Найдите угол ANM.

9.43. В равнобедренных треугольниках ABE и ABK отрезок AB является основанием. Медианы этих треугольников, проведённые из вершин E и K соответственно, равны 10 см и 6 см. Найдите отрезок EK.

9.44. В треугольнике ABC ($\angle B = 90°$) биссектриса AE равна отрезку EC. Докажите, что $AC = 2AB$.

9.45. В треугольнике ABC биссектриса AE равна отрезку EC. Известно, что $AC = 2AB$. Найдите угол ABC.

9.46. На сторонах AB и BC треугольника ABC отметили соответственно точки K и D. Отрезки AD и CK пересекаются в точке M. Известно, что $CM = 2KM$, $AM = MD = DC$. Докажите, что отрезок CK — высота треугольника ABC.

9.47. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL. На продолжении отрезка BL за точку L отметили точку K так, что $\angle BAK + \angle BAL = 180°$. Известно, что $BL = AB$. Докажите, что $BK = BC$.

9.48. На медиане BD треугольника ABC отметили точки E и K так, что $BE = EK = KD$. Известно, что $AD = AK$ и $AB = 10$ см. Найдите отрезок CE.

9.49. В треугольнике ABC медиана BM в два раза меньше стороны AB. Докажите, что $\angle MBC = \angle BCA = \angle CAB$.

9.50. В треугольнике ABC сторона AB больше стороны BC и биссектриса AL равна стороне AC. На биссектрисе AL отметили точку K так, что $CK = BL$. Докажите, что $\angle CKL = \angle ABC$.

§ 10 Признаки равнобедренного треугольника

В предыдущем параграфе мы рассмотрели свойства равнобедренного треугольника. А как среди треугольников «распознавать» равнобедренные? На этот вопрос дают ответ следующие теоремы-признаки.

Теорема 10.1

Если медиана треугольника является его высотой, то этот треугольник равнобедренный.

Доказательство

Рассмотрим треугольник ABC, в котором отрезок BM — медиана и высота. Надо доказать, что $AB = BC$ (рис. 10.1).

Из условия теоремы следует, что прямая BM — серединный перпендикуляр отрезка AC.

Тогда по свойству серединного перпендикуляра $AB = BC$. ■

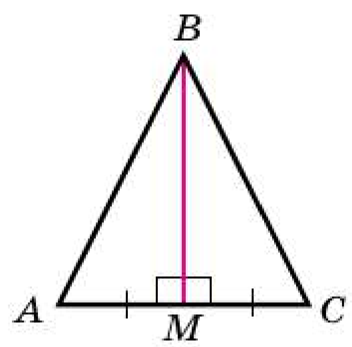


Рис. 10.1

Теорема 10.2

Если биссектриса треугольника является его высотой, то этот треугольник равнобедренный.

Доказательство

Рассмотрим треугольник ABC, в котором отрезок BL — биссектриса и высота. Надо доказать, что $AB = BC$ (рис. 10.2).

В треугольниках ABL и CBL сторона BL — общая, $\angle ABL = \angle CBL$ (так как по условию луч BL — биссектриса угла ABC), $\angle ALB = \angle CLB = 90°$ (так как по условию отрезок BL — высота треугольника ABC). Следовательно, треугольники ABL и CBL равны по второму признаку равенства треугольников. Тогда стороны AB и BC равны как соответственные стороны равных треугольников. ■

Теорема 10.3

Если в треугольнике два угла равны, то этот треугольник равнобедренный.

Доказательство

Рассмотрим треугольник ABC, в котором $\angle A = \angle C$. Надо доказать, что $AB = BC$.

Проведём серединный перпендикуляр a стороны AC. Докажем, что прямая a проходит через вершину B.

Предположим, что это не так. Тогда прямая a пересекает во внутренней точке либо сторону AB (рис. 10.3), либо сторону BC (рис. 10.4).

Рассмотрим первый из этих случаев. Пусть K — точка пересечения прямой a со стороной AB. Тогда по свойству серединного перпендикуляра (теорема 8.2) $AK = CK$. Следовательно, треугольник AKC равнобедренный, а значит, $\angle A = \angle ACK$. Но по условию $\angle A = \angle ACB$. Тогда имеем: $\angle ACB = \angle ACK$, что противоречит основному свойству величины угла (§ 3).

Аналогично можно получить противоречие и для второго случая (рис. 10.4).

Следовательно, наше предположение неверно. Прямая a проходит через точку B (рис. 10.5). Тогда по свойству серединного перпендикуляра $BA = BC$. ■

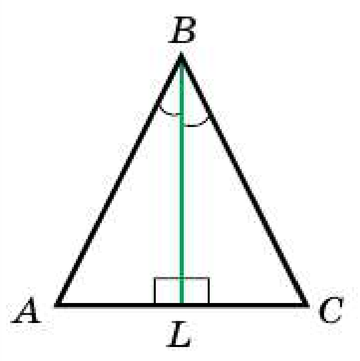


Рис. 10.2

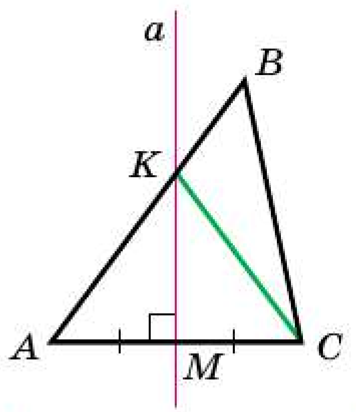


Рис. 10.3

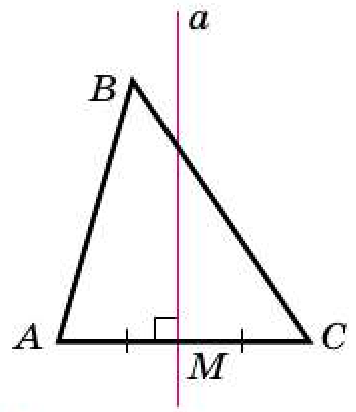


Рис. 10.4

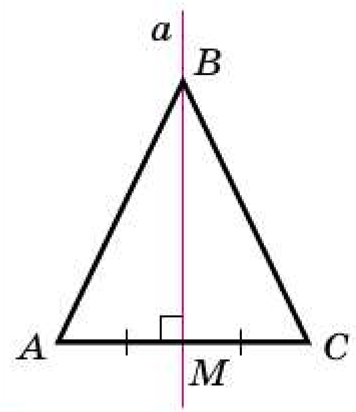


Рис. 10.5

Из этой теоремы следует, что:

1) ***в треугольнике против равных углов лежат равные стороны;***

2) ***если в треугольнике все углы равны, то этот треугольник равносторонний.***

Теорема 10.4

Если медиана треугольника является его биссектрисой, то этот треугольник равнобедренный.

Доказательство

Рассмотрим треугольник ABC, в котором отрезок BM — медиана и биссектриса. Надо доказать, что $AB = BC$.

На луче BM отложим отрезок MD, равный отрезку BM (рис. 10.6).

В треугольниках AMD и CMB имеем: $AM = MC$ (так как по условию отрезок BM — медиана), $BM = MD$ по построению, углы AMD и CMB равны как вертикальные. Следовательно, треугольники AMD и CMB равны по первому признаку равенства треугольников. Тогда стороны AD и BC, углы ADM и CBM равны как соответственные элементы равных треугольников.

Так как луч BD — биссектриса угла ABC, то $\angle ABM = \angle CBM$. Поскольку $\angle CBM = \angle ADM$, то получаем, что $\angle ABM = \angle ADM$. Тогда по признаку равнобедренного треугольника (теорема 10.3) получаем, что треугольник DAB равнобедренный, откуда $AD = AB$. И уже доказано, что $AD = BC$. Следовательно, $AB = BC$. ■

Задача. В треугольнике ABC проведена биссектриса BM (рис. 10.7), $\angle BAK = 70°$, $\angle AKC = 110°$. Докажите, что $BM \perp AK$.

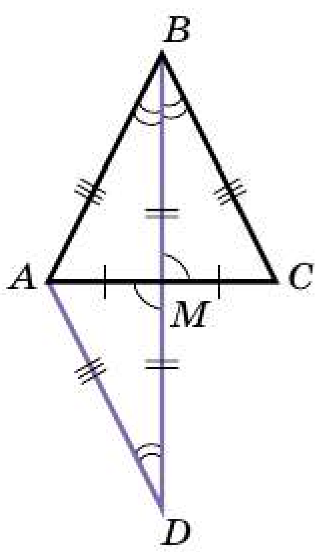


Рис. 10.6

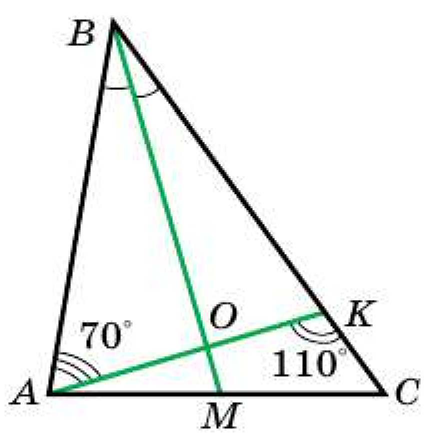


Рис. 10.7

Решение. Поскольку углы BKA и AKC смежные, то $\angle BKA = 180° - \angle AKC$. Тогда $\angle BKA = 180° - 110° = 70°$.

Следовательно, в треугольнике ABK получаем, что $\angle BAK = \angle BKA = 70°$. Треугольник ABK — равнобедренный с основанием AK, и его биссектриса BO (O — точка пересечения AK и BM) является также высотой, т. е. $BM \perp AK$. ■

1. Сформулируйте признаки равнобедренного треугольника.
2. Какова связь между равными углами и равными сторонами треугольника?
3. Что можно сказать о треугольнике, если все его углы равны?

Упражнения

10.1. В треугольнике ABC медиана BK перпендикулярна стороне AC. Найдите угол ABC, если $\angle ABK = 25°$.

10.2. Серединный перпендикуляр стороны AC треугольника ABC проходит через вершину B. Найдите угол C, если $\angle A = 17°$.

10.3. В треугольнике ABC известно, что $\angle ACB = 90°$, $\angle A = \angle B = 45°$, отрезок CK — высота. Найдите сторону AB, если $CK = 7$ см.

10.4. На рисунке 10.8 $\angle AMK = \angle ACB$, $AK = MK$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

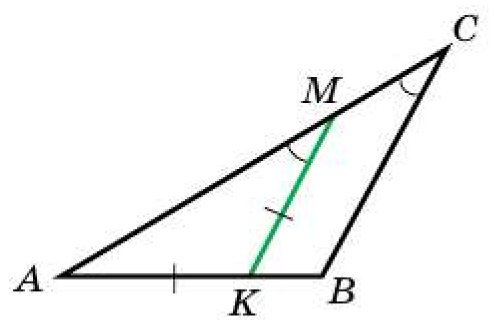


Рис. 10.8

10.5. Прямая, перпендикулярная биссектрисе угла A, пересекает его стороны в точках B и C. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

10.6. Биссектрисы AM и CK углов при основании AC равнобедренного треугольника ABC пересекаются в точке O. Докажите, что треугольник AOC равнобедренный.

10.7. В треугольнике ABC биссектриса BK является его высотой. Найдите периметр треугольника ABC, если периметр треугольника ABK равен 16 см и $BK = 5$ см.

10.8. Верно ли утверждение:

1) если медиана и высота треугольника, проведённые из одной вершины, не совпадают, то этот треугольник не является равнобедренным;

2) если биссектриса треугольника делит противолежащую сторону пополам, то этот треугольник равнобедренный?

10.9. Медианы AE и CF, проведённые к боковым сторонам BC и AB равнобедренного треугольника ABC, пересекаются в точке M. Докажите, что треугольник AMC равнобедренный.

10.10. Точки M и K принадлежат соответственно боковым сторонам AB и BC равнобедренного треугольника ABC, $AM = CK$. Отрезки AK и CM пересекаются в точке O. Докажите, что треугольник AOC равнобедренный.

10.11. На сторонах AC и BC треугольника ABC отметили соответственно точки D и E так, что $BE = DE$. Известно, что $AE \perp BD$. Докажите, что $AB = AD$.

10.12. На сторонах AB и BC треугольника ABC отметили соответственно точки D и E так, что $\angle EAC = \angle DCA$. Отрезки AE и CD пересекаются в точке F, $DF = EF$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

10.13. Через середину D стороны AB треугольника ABC проведены прямые, перпендикулярные биссектрисам углов ABC и BAC. Эти прямые пересекают стороны AC и BC в точках M и K соответственно. Докажите, что $AM = BK$.

10.14. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) точка пересечения серединного перпендикуляра стороны BC и биссектрисы угла C принадлежит медиане BM. Докажите, что треугольник ABC равносторонний.

10.15. В остроугольном треугольнике ABC медиана AM равна высоте BK и $\angle MAB = \angle KBA$. Докажите, что треугольник ABC равносторонний.

10.16. Медиана AD, высота BE и биссектриса CF треугольника ABC пересекаются в точке O. Известно, что $BO = CO$. Докажите, что треугольник ABC равносторонний.

10.17. На стороне AC треугольника ABC отметили точки K и E так, что $AK = KE = EC$. Могут ли при этом выполняться равенства $\angle ABK = \angle KBE = \angle CBE$?

10.18. Медиана AM треугольника ABC перпендикулярна его биссектрисе BK. Найдите сторону AB, если $BC = 16$ см.

10.19. Через вершины A и C треугольника ABC проведены прямые, перпендикулярные биссектрисе угла ABC. Эти прямые пересекают прямые BC и BA в точках K и M соответственно (рис. 10.9). Известно, что $BM = 8$ см, $KC = 1$ см. Найдите сторону AB.

10.20. В треугольнике ABC $AB = 3$ см, $AC = 6$ см. На стороне BC отметили точку M такую, что $CM = 1$ см. Прямая, проходящая через точку M перпендикулярно биссектрисе угла ACB, пересекает отрезок AC в точке K, а прямая, проходящая через точку K перпендикулярно биссектрисе угла BAC, пересекает прямую AB в точке D. Найдите отрезок BD.

10.21. Прямая, проходящая через вершину A треугольника ABC перпендикулярно его медиане BD, делит эту медиану пополам. Найдите отношение длин сторон AB и AC треугольника ABC.

10.22. В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 90°$, $\angle A = 67{,}5°$, $\angle B = 22{,}5°$, отрезок CK — биссектриса треугольника ABC, отрезок CM — биссектриса треугольника BCK (рис. 10.10). Докажите, что точка M — середина отрезка AB.

10.23. В треугольнике ABC на стороне AB отметили точку K и провели биссектрису KE треугольника AKC и высоту KH треугольника BKC. Известно, что $\angle EKH = 90°$ и $HC = 5$ см. Найдите сторону BC.

10.24. В «звезде» $ACEBD$ (рис. 10.11) равны углы при вершинах A и B, углы при вершинах E и C, а также равны отрезки AC и BE. Докажите, что $AD = BD$.

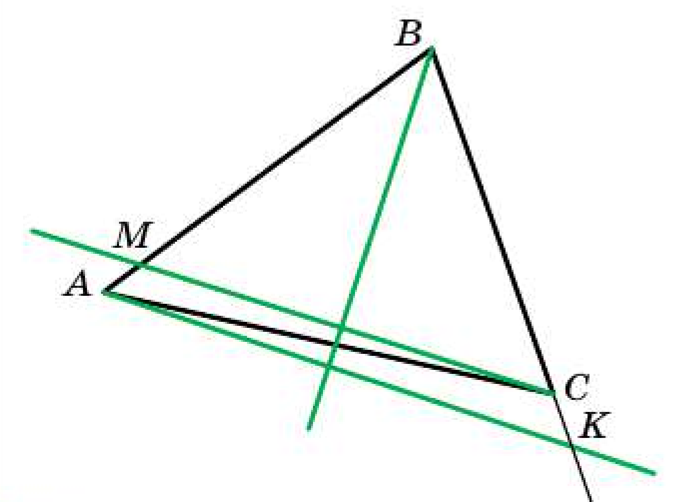


Рис. 10.9

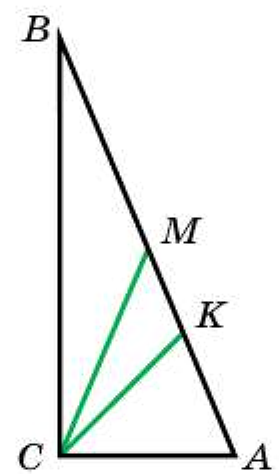


Рис. 10.10

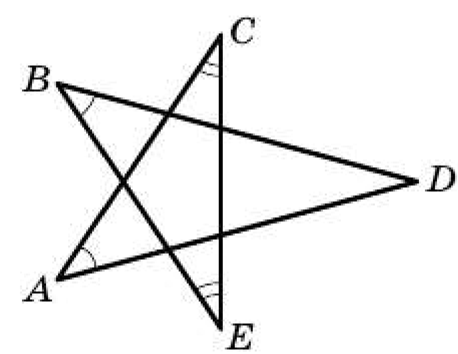


Рис. 10.11

10.25. Длины сторон треугольника, выраженные в сантиметрах, равны трём последовательным натуральным числам. Найдите стороны этого треугольника, если одна из его медиан перпендикулярна одной из его биссектрис.

10.26. Из точки B на биссектрисы углов A и C треугольника ABC опустили перпендикуляры BM и BK. Известно, что $BM = BK$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

10.27. На стороне BC треугольника ABC отметили точку F. Отрезок AF пересекает медиану BD в точке E. Известно, что $AE = BC$. Докажите, что $FB = FE$.

10.28. На стороне AB треугольника ABC отметили точку K. Отрезок CK пересекает медиану AM в точке F. Известно, что $KF = KA$. Докажите, что $CF = AB$.

10.29. В треугольнике ABC провели медиану BM. Известно, что $\angle MBC = \angle BAC = \angle BCA$. Докажите, что $AB = 2BM$.

10.30. Точка D — середина медианы AF треугольника ABC. Прямая CD пересекает сторону AB в точке E. Известно, что $BD = BF$. Докажите, что $AE = DE$.

10.31. На сторонах AB и BC треугольника ABC отметили соответственно точки E и M так, что отрезок CE пересекает отрезок AM в его середине — точке O. Известно, что $AB = CO$ и $EA = EO$. Докажите, что отрезок AM — медиана треугольника ABC.

10.32. В треугольнике ABC медиана AF равна стороне AB. На луче AB отметили точку D так, что $AB = BD$. Прямая DF пересекает сторону AC в точке E. Докажите, что $EF = EC$.

§ 11 Третий признак равенства треугольников

Теорема 11.1

(третий признак равенства треугольников: по трём сторонам)

Если три стороны одного треугольника равны соответственно трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство

Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 11.1), у которых $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$ (эти равенства указывают, какие стороны треугольников соответствуют друг другу). Докажем, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

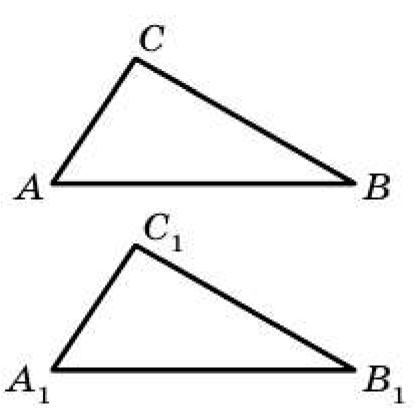


Рис. 11.1

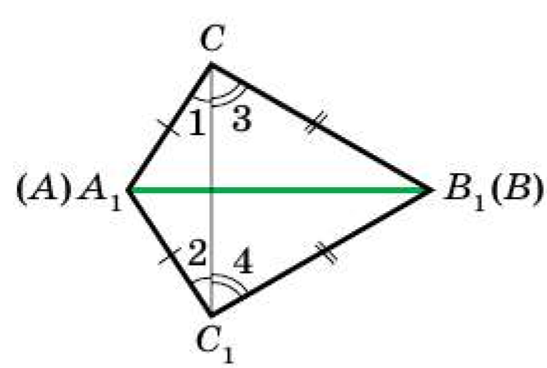


Рис. 11.2

Расположим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ так, чтобы вершина A совместилась с вершиной A_1, вершина B — с вершиной B_1, а вершины C и C_1 лежали в разных полуплоскостях относительно прямой AB (рис. 11.2). Проведём отрезок CC_1. Так как $AC = A_1C_1$, то треугольник C_1A_1C равнобедренный, а значит, $\angle 1 = \angle 2$. Аналогично можно доказать, что $\angle 3 = \angle 4$. Следовательно, $\angle A_1C_1B_1 = \angle A_1CB_1$. Тогда треугольники $A_1C_1B_1$ и A_1CB_1 равны по двум сторонам и углу между ними, т. е. по первому признаку равенства треугольников.

Казалось бы, доказательство завершено. Однако мы рассмотрели лишь случай, когда отрезок CC_1 пересекает отрезок A_1B_1 во внутренней точке. На самом деле отрезок CC_1 может проходить через один из концов отрезка A_1B_1, например через точку A_1 (рис. 11.3), или не иметь общих точек с отрезком A_1B_1 (рис. 11.4). В каждом из этих случаев доказательства будут аналогичны приведённому. Проведите их самостоятельно. ■

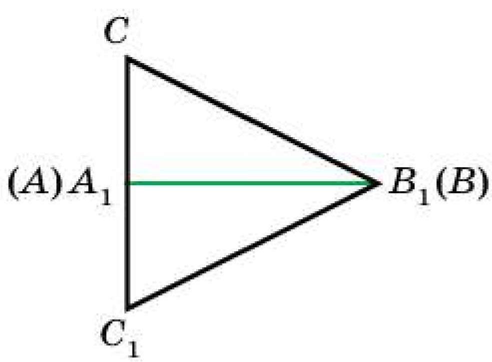


Рис. 11.3

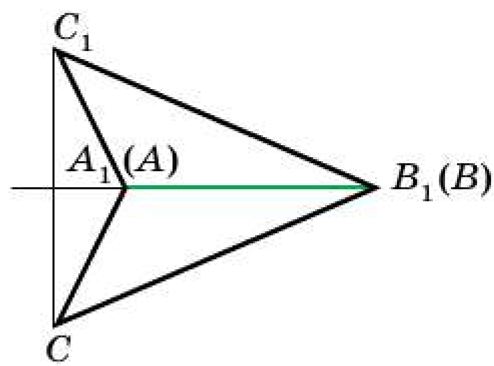


Рис. 11.4

Из третьего признака равенства треугольников следует, что *треугольник — жёсткая фигура*. Действительно, если четыре рейки скрепить так, как показано на рисунке 11.5, *а*, то такая конструкция не будет жёсткой (рис. 11.5, *б*, *в*). Если же добавить ещё одну рейку, то получим два треугольника (рис. 11.5, *г*), и тогда конструкция станет жёсткой. Этот факт широко используют на практике (рис. 11.6).

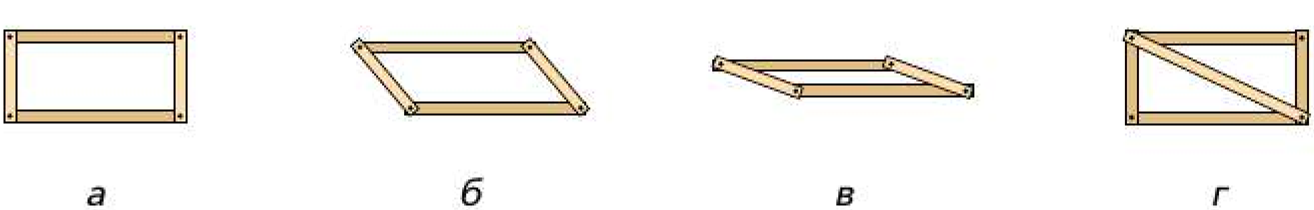


Рис. 11.5

Опоры линий электропередачи

Шуховская телебашня

Рис. **11.6** Жёсткие конструкции

Теорема 11.2

Если точка равноудалена от концов отрезка, то она принадлежит серединному перпендикуляру этого отрезка.

Доказательство

Пусть точка X равноудалена от концов отрезка AB, т. е. $XA = XB$ (рис. 11.7). Рассмотрим треугольники AXM и BXM, где точка M — середина отрезка AB. Тогда $\triangle AXM = \triangle BXM$ по трём сторонам, т. е. по третьему признаку равенства треугольников. Отсюда $\angle AMX = \angle BMX$. Сумма этих углов равна $180°$, следовательно, каждый из них равен $90°$. Значит, прямая XM — серединный перпендикуляр отрезка AB.

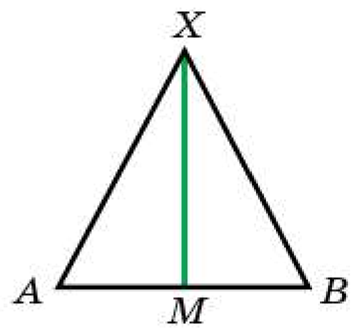


Рис. **11.7**

Заметим, что мы рассмотрели случай, когда точка X не принадлежит прямой AB. Если точка X принадлежит прямой AB, то она совпадает с серединой отрезка AB, а значит, принадлежит его серединному перпендикуляру. ■

1. Сформулируйте третий признак равенства треугольников.
2. Где находятся точки, равноудалённые от концов отрезка?

Упражнения

11.1. На рисунке 11.8 $AB = CD$, $BC = AD$. Докажите, что $\angle B = \angle D$.

11.2. На рисунке 11.9 $AC = AD$, $BC = BD$. Найдите угол BAC, если $\angle BAD = 25°$.

11.3. Докажите, что два равнобедренных треугольника равны, если боковая сторона и основание одного треугольника соответственно равны боковой стороне и основанию другого треугольника.

11.4. Докажите, что два равносторонних треугольника равны, если сторона одного треугольника равна стороне другого треугольника.

11.5. На рисунке 11.10 $\triangle ABC = \triangle DCB$, причём $AB = CD$. Докажите, что $\triangle ABD = \triangle DCA$.

11.6. На рисунке 11.10 $AB = CD$, $AC = BD$. Докажите, что треугольник BOC равнобедренный.

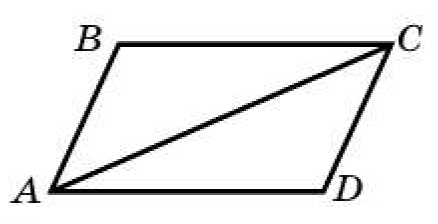


Рис. **11.8**

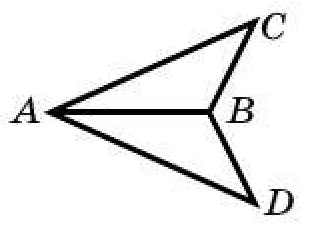


Рис. **11.9**

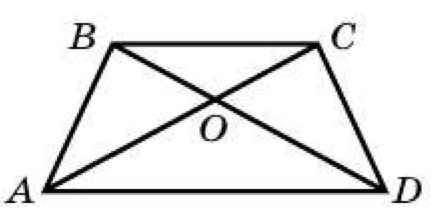


Рис. **11.10**

11.7. Каждая из точек M и N равноудалена от концов отрезка AB. Докажите, что прямая MN — серединный перпендикуляр отрезка AB.

11.8. На рисунке 11.11 $AB = KE$, $BC = KM$, $AM = EC$. Докажите, что $\triangle AMK = \triangle BCE$.

11.9. На рисунке 11.12 $AB = CD$, $BC = AD$, луч BM — биссектриса угла ABC, луч DK — биссектриса угла ADC. Докажите, что $\triangle ABM = \triangle CDK$.

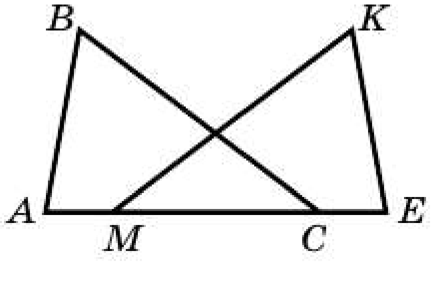


Рис. **11.11**

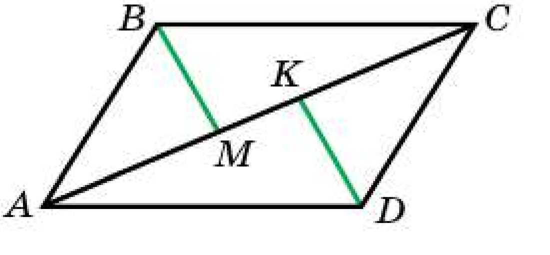


Рис. **11.12**

11.10. Равные отрезки AB и CD пересекаются в точке O так, что $OA = OD$. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle DCB$.

11.11. Отрезки BD и B_1D_1 — биссектрисы треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно, $AB = A_1B_1$, $BD = B_1D_1$, $AD = A_1D_1$. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

11.12. Коля утверждает, что ему удалось сделать рисунок, на котором $AB = AC$ и $AM = AN$ (рис. 11.13). Прав ли Коля?

11.13. Можно ли утверждать, что два треугольника равны, если каждой стороне одного треугольника равна некоторая сторона другого треугольника?

11.14. Точка M — середина стороны AC треугольника ABC. На сторонах AB и BC соответственно существуют такие точки E и K, что $AK = CE$ и $ME = MK$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

11.15. На рисунке 11.14 точки M и N — середины равных отрезков AD и BC. Серединные перпендикуляры отрезков AB и CD пересекаются в точке P. Докажите, что серединный перпендикуляр отрезка MN проходит через точку P.

11.16. На рисунке 11.15 серединные перпендикуляры равных отрезков AB и CD пересекают отрезок AD в его середине. Докажите, что $AC = BD$.

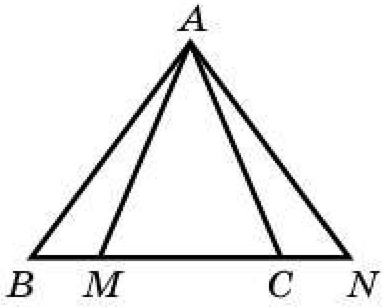


Рис. **11.13**

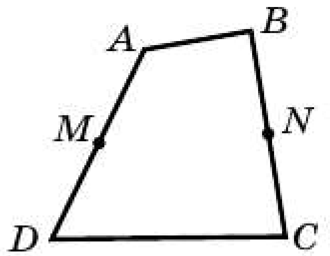


Рис. **11.14**

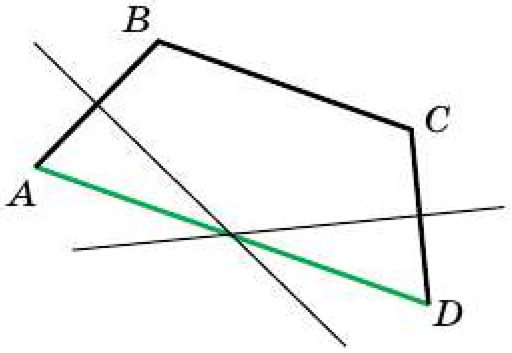


Рис. **11.15**

11.17. Докажите равенство двух треугольников по двум сторонам и медиане, проведённой к третьей стороне.

§ 12 Теоремы

Вы видите, что в учебнике появляется всё больше и больше теорем. И это не удивительно: ведь геометрия в основном состоит из теорем и их доказательств.

Формулировки всех теорем, которые мы доказали, состоят из двух частей. Первую часть теоремы (то, что дано) называют **условием** теоремы, вторую часть теоремы (то, что требуется доказать) — **заключением** теоремы.

Например, в теореме 8.1 (первый признак равенства треугольников) условием является то, что ***две стороны и угол между ними одного треугольника равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника***, а заключением — ***равенство треугольников.***

Все известные вам теоремы можно условно разделить на **теоремы-свойства** и **теоремы-признаки**. Например, теорема 1.1 устанавливает свойство пересекающихся прямых, теорема 9.1 — свойство равнобедренного треугольника.

Теоремы-признаки перечисляют свойства, по которым можно распознать фигуру, т. е. отнести её к тому или иному виду (классу).

Так, теоремы-признаки равенства треугольников указывают требования, по которым два треугольника можно причислить к классу равных. Например, в теоремах 10.1—10.4 сформулированы свойства, по которым распознают равнобедренный треугольник.

Теоремы, которые следуют *непосредственно* из аксиом или теорем, называют **теоремами-следствиями** или просто **следствиями**.

Например, свойство углов, противолежащих равным сторонам треугольника, является следствием из теоремы 9.1.

Если в теореме 8.2 о свойстве серединного перпендикуляра поменять местами условие и заключение, то получим теорему 11.2. Две теоремы, каждую из которых можно получить из другой, поменяв местами условие и заключение, называют **взаимно обратными**. Если какую-то из этих теорем назвать **прямой**, то вторую теорему будут называть **обратной**.

Меняя местами условие и заключение теоремы, надо быть очень внимательными: не всегда можно получить истинное утверждение. Например, утверждение, обратное теореме 4.1 о сумме смежных углов, неверно. Действительно, если сумма каких-то двух углов равна 180°, то совершенно не обязательно, чтобы эти углы были смежными.

Вы знаете, что справедливость теоремы устанавливают путём логических рассуждений, т. е. доказательства.

Теорема 1.1 была доказана методом **от противного**. Название этого метода фактически отражает его суть. Мы предположили, что заключение теоремы 1.1 неверно. На основании этого предположения с помощью логических рассуждений мы получили факт, который противоречил основному свойству прямой.

Методом от противного также были доказаны и другие теоремы, например теоремы 5.1, 10.3.

Очень важно, чтобы доказательство теоремы было полным, т. е. были рассмотрены все возможные случаи. Так, полное доказательство теоремы 11.1 (третий признак равенства треугольников) потребовало рассмотрения трёх возможных случаев.

Умение видеть все тонкости и нюансы доказательства — важнейшее качество, формирующее математическую культуру. Если бы, например, при доказательстве теоремы 8.2 о свойстве серединного перпендикуляра отрезка мы не рассмотрели отдельно случай, когда точка X является серединой отрезка AB, то для этого случая обращение к треугольникам AXM и BXM было бы невозможным.

При доказательстве теоремы 10.4 (признак равнобедренного треугольника) мы использовали **приём дополнительного построения**: рисунок дополнили элементами, о которых не шла речь в условии теоремы. Этот метод является ключом к решению многих задач и доказательству ряда теорем. Поэтому очень важно научиться видеть «выгодное» дополнительное построение — то, которое поможет получить нужный результат.

А как приобрести такое «геометрическое зрение»? Вопрос непростой, и на него сложно ответить конкретными рекомендациями. Но всё же мы советуем, во-первых, не быть равнодушными к геометрии, а полюбить этот красивый предмет, во-вторых, решать больше задач, чтобы развить интуицию и приобрести нужный опыт.

?

1. Из каких двух частей состоит формулировка теоремы?

2. Как называют теорему, в которой перечислены свойства, позволяющие отнести фигуру к какому-то виду (классу)?

3. Как называют теорему, непосредственно следующую из аксиомы или другой теоремы?

4. Как называют пару теорем, в которых условие и заключение поменяли местами?

5. В чём состоит метод доказательства от противного?

6. Какие из теорем 1.1, 4.2, 5.1, 8.3 доказаны методом от противного?

7. В чём состоит приём дополнительного построения?

Упражнения

12.1. В теоремах 4.1, 8.2, 9.1, 10.3, 11.2 укажите условие и заключение теоремы.

12.2. Из теорем 4.1, 8.2, 9.1, 10.3, 11.2 выберите: 1) теоремы-свойства; 2) теоремы-признаки.

12.3. Сформулируйте утверждение, обратное данному:
1) если треугольник равносторонний, то его углы равны;
2) если два угла вертикальные, то их биссектрисы являются дополнительными лучами;
3) если угол между биссектрисами двух углов прямой, то эти углы смежные;
4) если сторона и противолежащий ей угол одного треугольника равны соответственно стороне и противолежащему ей углу другого треугольника, то эти треугольники равны.
Для каких из данных утверждений:
а) прямое и обратное утверждения истинны;
б) прямое утверждение истинно, а обратное — ложно;
в) прямое утверждение ложно, а обратное — истинно?

12.4. Сформулируйте утверждение, обратное данному:
1) если точка B лежит между точками A и C, то $AB + BC = AC$;
2) если два треугольника не равны, то их периметры также не равны;
3) если градусная мера угла больше $90°$, то он тупой.
Для каких из данных утверждений:
а) прямое и обратное утверждения истинны;
б) прямое утверждение истинно, а обратное — ложно;
в) прямое утверждение ложно, а обратное — истинно?

12.5. Сформулируйте утверждение, отрицающее данное:
1) отрезок AB пересекает прямую m;
2) градусная мера угла ABC больше $40°$;
3) из двух смежных углов хотя бы один не больше $90°$;
4) лучи OA и OB не являются дополнительными;
5) отрезок имеет только одну середину.

12.6. Сформулируйте утверждение, отрицающее данное:
1) угол ABC не является прямым;
2) треугольник MKE равнобедренный;
3) через точку на прямой можно провести только одну прямую, перпендикулярную данной;
4) луч AC делит угол BAK пополам.

12.7. Докажите, используя метод от противного, что если ни одна из высот треугольника не совпадает с биссектрисой, проведённой из этой же вершины, то треугольник не является равнобедренным.

12.8. Докажите, используя метод от противного, что если стороны AB и BC треугольника ABC не равны, то его медиана BD не является его высотой.

12.9. Докажите методом от противного, что если разность двух углов равна $1°$, то они не могут быть вертикальными.

12.10. Докажите методом от противного, что из двух смежных углов хотя бы один не меньше $90°$.

12.11. Сформулируйте и докажите признак равенства равнобедренных треугольников по боковой стороне и медиане, проведённой к боковой стороне.

12.12. Сформулируйте и докажите признак равенства треугольников по стороне, медиане, проведённой к этой стороне, и углу между медианой и этой стороной.

Итоги главы 2

Равные фигуры

Две фигуры называют равными, если их можно совместить наложением.

Основное свойство равенства треугольников

Для данного треугольника ABC и данного луча A_1M существует треугольник $A_1B_1C_1$, равный треугольнику ABC, такой, что $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$ и сторона A_1B_1 принадлежит лучу A_1M, а вершина C_1 лежит в заданной полуплоскости относительно прямой A_1M.

Теорема о существовании и единственности прямой, перпендикулярной данной

Через точку, не принадлежащую данной прямой, проходит только одна прямая, перпендикулярная данной.

Высота треугольника

Перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на прямую, содержащую противолежащую сторону, называют высотой треугольника.

Медиана треугольника

Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны, называют медианой треугольника.

Биссектриса треугольника

Отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противолежащей стороны, называют биссектрисой треугольника.

Первый признак равенства треугольников: по двум сторонам и углу между ними

Если две стороны и угол между ними одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

Второй признак равенства треугольников: по стороне и двум прилежащим к ней углам

Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника равны соответственно стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Третий признак равенства треугольников: по трём сторонам

Если три стороны одного треугольника равны соответственно трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Серединный перпендикуляр отрезка

Прямую, перпендикулярную отрезку и проходящую через его середину, называют серединным перпендикуляром отрезка.

Равнобедренный треугольник

Треугольник, у которого две стороны равны, называют равнобедренным.

Равносторонний треугольник

Треугольник, у которого все стороны равны, называют равносторонним.

Разносторонний треугольник

Если в треугольнике длины всех сторон различны, то такой треугольник называют разносторонним.

Свойства равнобедренного треугольника

В равнобедренном треугольнике: 1) углы при основании равны; 2) биссектриса, высота и медиана, проведённые к его основанию, совпадают.

Признаки равнобедренного треугольника

- Если медиана треугольника является его высотой, то этот треугольник равнобедренный.
- Если биссектриса треугольника является его высотой, то этот треугольник равнобедренный.
- Если в треугольнике два угла равны, то этот треугольник равнобедренный.
- Если медиана треугольника является его биссектрисой, то этот треугольник равнобедренный.

Свойства треугольников, следующие из свойств и признаков равнобедренного треугольника

- В треугольнике против равных сторон лежат равные углы.
- В треугольнике против равных углов лежат равные стороны.
- В равностороннем треугольнике все углы равны.
- В равностороннем треугольнике биссектриса, высота и медиана, проведённые из одной вершины, совпадают.
- Если в треугольнике все углы равны, то этот треугольник равносторонний.

Глава 3

Параллельные прямые. Сумма углов треугольника

Как установить параллельность двух прямых? Какими свойствами обладают параллельные прямые? Чему равна сумма углов любого треугольника? Какими свойствами обладает прямоугольный треугольник? Изучив материал этой главы, вы получите ответы на поставленные вопросы.

§ 13 Параллельные прямые

Определение

Две прямые называют параллельными, если они не пересекаются.

На рисунке 13.1 изображены параллельные прямые a и b. Пишут: $a \parallel b$ (читают: «прямые a и b параллельны» или «прямая a параллельна прямой b»).

Если два отрезка лежат на параллельных прямых, то их называют параллельными. На рисунке 13.2 отрезки AB и CD параллельны. Пишут: $AB \parallel CD$.

Также можно говорить о параллельности двух лучей, луча и отрезка, прямой и луча, отрезка и прямой. Например, на рисунке 13.3 изображены параллельные лучи AB и CD.

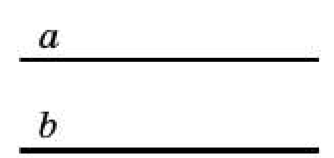


Рис. 13.1

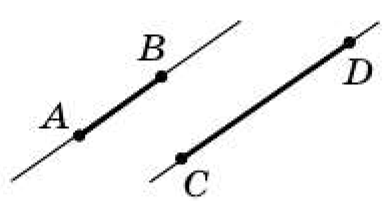


Рис. 13.2

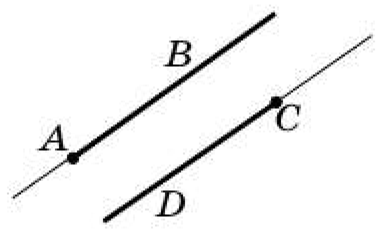


Рис. 13.3

Теорема 13.1

(признак параллельности прямых)

Две прямые, перпендикулярные третьей прямой, параллельны.

Доказательство

На рисунке 13.4 $a \perp c$ и $b \perp c$. Надо доказать, что $a \parallel b$.

Предположим, что прямые a и b пересекаются в некоторой точке M (рис. 13.5). Тогда через точку M, не принадлежащую прямой c, проходят две прямые a и b, перпендикулярные прямой c. Это противоречит тому, что через точку можно провести только одну прямую, перпендикулярную данной (теорема 7.1). Значит, наше предположение неверно, следовательно, $a \parallel b$.

Случай, когда точка M принадлежит прямой c, рассмотрите самостоятельно. ■

Доказанная теорема разъясняет, почему с помощью линейки и угольника можно строить параллельные прямые так, как показано на рисунке 13.6.

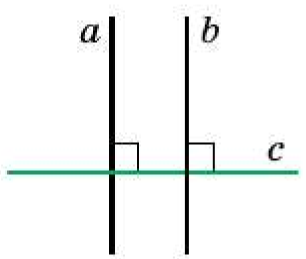


Рис. 13.4

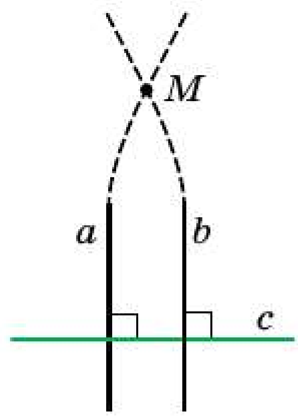


Рис. 13.5

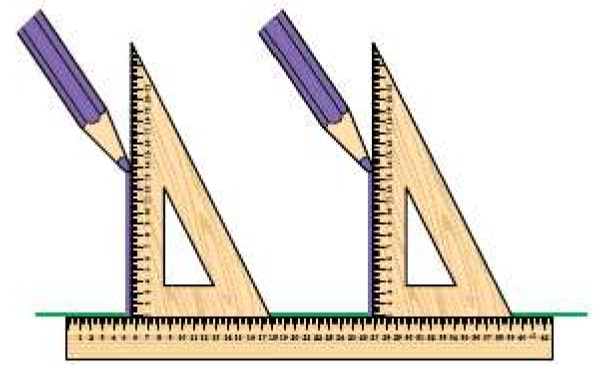


Рис. 13.6

Следствие

Через данную точку M, не принадлежащую прямой a, можно провести прямую b, параллельную прямой a.

Доказательство

Пусть точка M не принадлежит прямой a (рис. 13.7).

Проведём через точку M прямую c, перпендикулярную прямой a. Теперь через точку M проведём прямую b, перпендикулярную прямой c. В силу признака параллельности прямых (теорема 13.1) получаем, что $a \parallel b$. ■

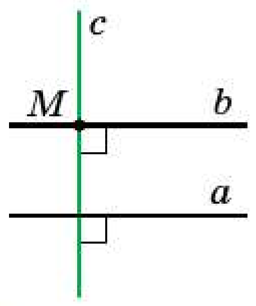


Рис. 13.7

Можно ли через точку M (рис. 13.7) провести ещё одну прямую, параллельную прямой a? Ответ на этот вопрос даёт основное свойство параллельных прямых.

Основное свойство параллельных прямых (аксиома параллельности прямых)

Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.

Теорема 13.2

Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.

Доказательство

Пусть $b \parallel a$ и $c \parallel a$. Докажем, что $b \parallel c$.

Предположим, что прямые b и c не параллельны, а пересекаются в некоторой точке M (рис. 13.8). Получается, что через точку M проходят две прямые, параллельные прямой a, что противоречит аксиоме параллельности прямых. Значит, наше предположение неверно; следовательно, $b \parallel c$. ■

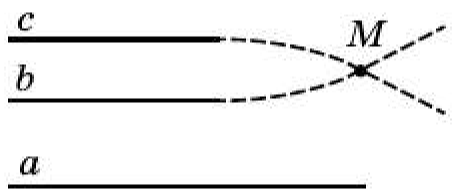


Рис. 13.8

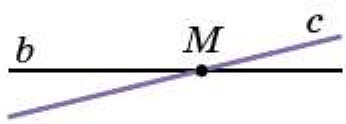


Рис. 13.9

Задача. Докажите, что если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую.

Решение. Пусть прямые a и b параллельны, прямая c пересекает прямую b в точке M (рис. 13.9). Предположим, что прямая c не пересекает прямую a, тогда $c \parallel a$. Но в этом случае через точку M проходят две прямые b и c, параллельные прямой a, что противоречит аксиоме параллельности прямых. Значит, наше предположение неверно; следовательно, прямая c пересекает прямую a. ■

?

1. Какие две прямые называют параллельными?
2. Каким символом обозначают параллельность прямых?
3. Как читают запись $m \parallel n$?
4. Какие отрезки называют параллельными?
5. Каково взаимное расположение двух прямых, перпендикулярных третьей прямой?
6. Сформулируйте аксиому параллельности прямых.
7. Каково взаимное расположение двух прямых, параллельных третьей прямой?
8. Если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то как эта прямая расположена относительно второй из них?

Практические задания

13.1. Перерисуйте в тетрадь рисунок 13.10. Проведите через каждую из точек A и B прямую, параллельную прямой m.

13.2. Начертите треугольник и проведите через каждую его вершину прямую, параллельную противолежащей стороне.

13.3. Перерисуйте в тетрадь рисунок 13.11. Проведите через точку B прямую m, параллельную прямой AC, а через точку D — прямую n, параллельную прямой AC. Каково взаимное расположение прямых m и n?

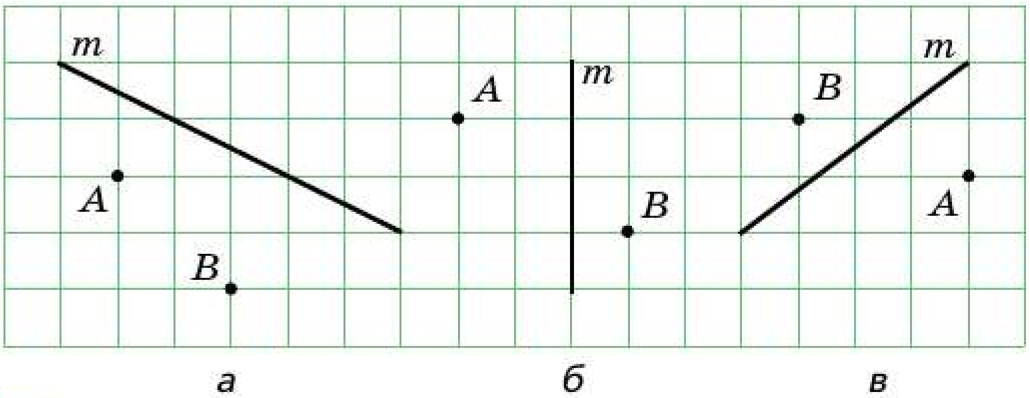


Рис. 13.10

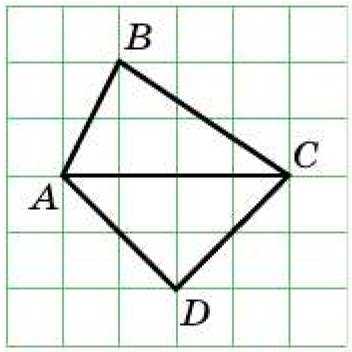


Рис. 13.11

Упражнения

13.4. Можно ли провести прямую, которая была бы параллельна каждой из пересекающихся прямых a и b?

13.5. Прямая a параллельна стороне AB треугольника ABC. Может ли прямая a быть параллельной стороне AC? Стороне BC?

13.6. Прямые a и b пересекаются. Можно ли провести такую прямую c, которая была бы параллельна прямой a и пересекала прямую b?

13.7. Можно ли утверждать, что два отрезка параллельны, если они не имеют общих точек?

13.8. Даны прямая и точка, лежащая вне её. Можно ли утверждать, что существует только один луч, параллельный данной прямой, началом которого является данная точка?

13.9. Сколько можно провести отрезков, параллельных данной прямой, через точку, не принадлежащую этой прямой?

13.10. Прямые a и b перпендикулярны прямой c, прямая d пересекает прямую a. Пересекает ли прямая d прямую b?

13.11. Докажите, что если любая прямая, пересекающая прямую a, пересекает и прямую b, то прямые a и b параллельны.

13.12. Докажите, что если прямые a и b параллельны и $a \perp c$, то $b \perp c$.

13.13. Прямые m и n перпендикулярны соответственно сторонам OA и OB угла AOB, отличного от развёрнутого. Докажите, что прямые m и n пересекаются.

13.14. На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC отметили соответственно точки M и N так, что $BM = BN$. Докажите, что $MN \parallel AC$.

13.15. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведены медианы AN и CM. Докажите, что $MN \parallel AC$.

13.16. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведены биссектрисы AN и CM. Докажите, что $MN \parallel AC$.

13.17. На рисунке 13.12 $AB = CD$ и $\angle A = \angle D$. Докажите, что $AD \parallel BC$.

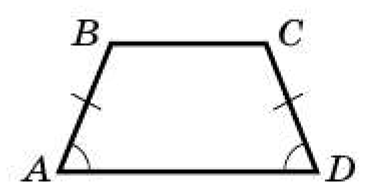


Рис. **13.12**

§ 14 Признаки параллельности двух прямых

Пусть прямая c пересекает прямые a и b. Прямую c называют **секущей** прямых a и b. Рассмотрим 8 углов (рис. 14.1).

Углы 3 и 6, 4 и 5 называют **односторонними**.

Углы 3 и 5, 4 и 6 называют **накрест лежащими**.

Углы 6 и 2, 5 и 1, 3 и 7, 4 и 8 называют **соответственными**.

Теорема 14.1

Если накрест лежащие углы, образующиеся при пересечении двух прямых секущей, равны, то прямые параллельны.

Доказательство

На рисунке 14.2 прямая c является секущей прямых a и b, $\angle 1 = \angle 2$. Докажем, что $a \parallel b$.

Доказательство достаточно провести для случая, когда углы 1 и 2 не тупые.

Если $\angle 1 = \angle 2 = 90^\circ$ (рис. 14.3), то параллельность прямых a и b следует из признака параллельности прямых (теорема 13.1).

Пусть теперь прямая c не перпендикулярна ни прямой a, ни прямой b. Обозначим буквами A и B точки пересечения прямой c с прямы-

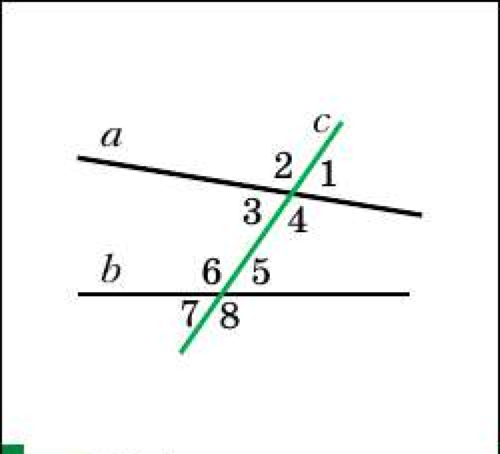


Рис. **14.1**

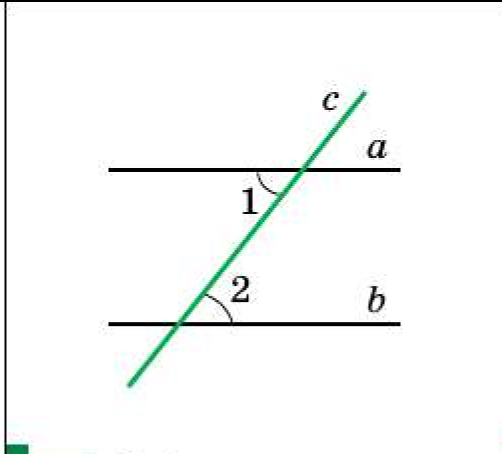


Рис. **14.2**

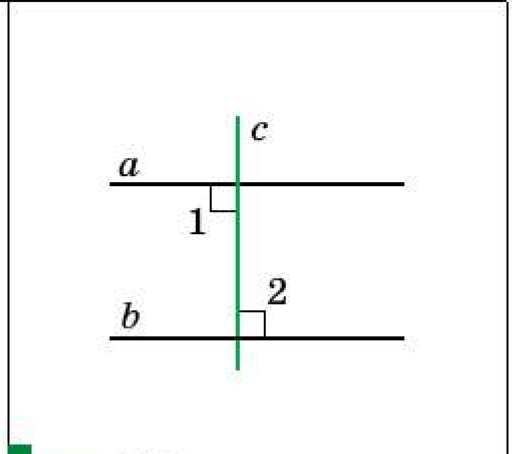


Рис. **14.3**

ми a и b соответственно. Отметим точку M — середину отрезка AB (рис. 14.4). Через точку M проведём перпендикуляр ME к прямой a. Пусть прямая ME пересекает прямую b в точке F. Имеем: углы 1 и 2 равны по условию; углы 3 и 4 равны как вертикальные. Следовательно, треугольники AME и BMF равны по стороне и двум прилежащим к ней углам, т. е. по второму признаку равенства треугольников. Отсюда $\angle AEM = \angle MFB = 90°$. Мы показали, что прямые a и b перпендикулярны прямой EF, значит, они параллельны. ■

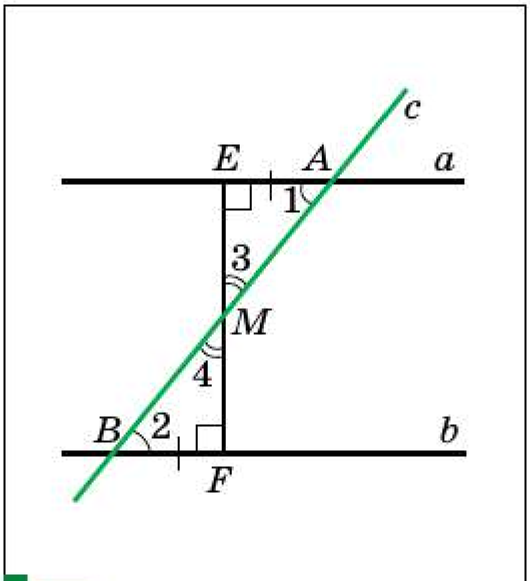


Рис. **14.4**

Теорема 14.2

Если сумма односторонних углов, образующихся при пересечении двух прямых секущей, равна 180°, то прямые параллельны.

Доказательство

На рисунке 14.5 прямая c является секущей прямых a и b, $\angle 1 + \angle 2 = 180°$. Докажем, что $a \parallel b$.

Углы 1 и 3 смежные, следовательно, $\angle 1 + \angle 3 = 180°$. Поскольку $\angle 1 + \angle 2 = 180°$, то $\angle 2 = \angle 3$. А углы 2 и 3 накрест лежащие, поэтому в силу теоремы 14.1 $a \parallel b$. ■

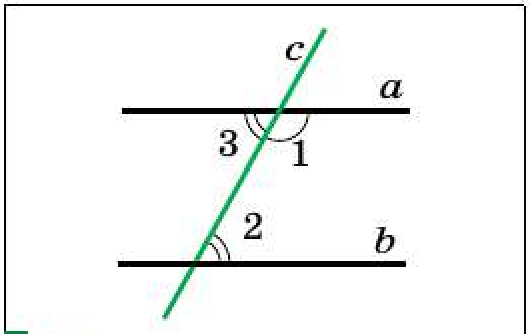


Рис. **14.5**

Теорема 14.3

Если соответственные углы, образующиеся при пересечении двух прямых секущей, равны, то прямые параллельны.

Доказательство

На рисунке 14.6 прямая c является секущей прямых a и b, $\angle 1 = \angle 2$. Докажем, что $a \parallel b$.

Углы 1 и 3 равны как вертикальные. Поскольку $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 1 = \angle 3$, то $\angle 2 = \angle 3$. Но углы 2 и 3 накрест лежащие. Поэтому в силу признака параллельности двух прямых (теорема 14.1) $a \parallel b$. ■

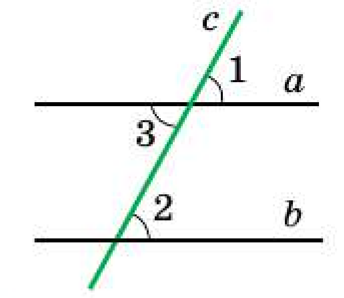


Рис. **14.6**

Задача. На рисунке 14.7 $AB = CD$, $\angle ABD = \angle CDB$. Докажите, что $BC \parallel AD$.

Решение. Для треугольников ABD и CDB имеем: $AB = CD$ и $\angle ABD = \angle CDB$ по условию, отрезок BD — общая сторона. Значит, треугольники ABD и CDB равны по двум сторонам и углу между ними, т. е. по первому признаку равенства треугольников.

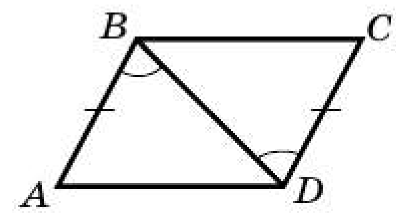


Рис. **14.7**

Тогда $\angle BDA = \angle DBC$. Поскольку углы BDA и DBC — накрест лежащие при прямых BC и AD и секущей BD и эти углы равны, то $BC \parallel AD$. ■

?

1. Какими должны быть накрест лежащие углы, образованные при пересечении двух прямых секущей, чтобы данные прямые были параллельными?

2. Какими должны быть односторонние углы, образованные при пересечении двух прямых секущей, чтобы данные прямые были параллельными?

3. Какими должны быть соответственные углы, образованные при пересечении двух прямых секущей, чтобы данные прямые были параллельными?

Практические задания

14.1. Проведите две прямые AB и CD. Проведите прямую MK, пересекающую каждую из прямых AB и CD. Обозначьте точку пересечения прямых AB и MK буквой O, а прямых CD и MK — буквой E. Заполните пропуски в тексте:

1) углы AOM и ... — соответственные;
2) углы AOE и ... — соответственные;
3) углы AOE и ... — накрест лежащие;
4) углы AOE и ... — односторонние.

Укажите, какими углами (соответственными, накрест лежащими или односторонними) являются:

1) $\angle BOM$ и $\angle DEM$; 2) $\angle BOE$ и $\angle DEM$; 3) $\angle BOE$ и $\angle OEC$.

14.2. Начертите две прямые и проведите их секущую. Пронумеруйте углы, образованные при пересечении данных прямых секущей. Укажите среди этих углов все пары:

1) соответственных углов;
2) односторонних углов;
3) накрест лежащих углов.

Упражнения

14.3. На рисунке 14.8 укажите все пары накрест лежащих, односторонних и соответственных углов.

14.4. Запишите, какие углы на рисунке 14.9 являются:

1) односторонними при прямых BC и AD и секущей AB;
2) односторонними при прямых CE и CD и секущей AD;
3) накрест лежащими при прямых BC и AD и секущей CE;
4) соответственными при прямых CE и CD и секущей AD;
5) односторонними при прямых BC и AD и секущей CE.

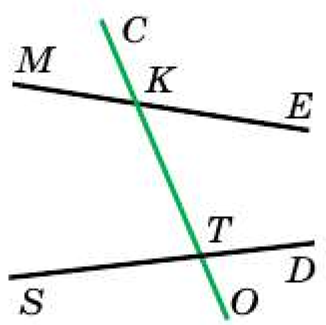


Рис. **14.8**

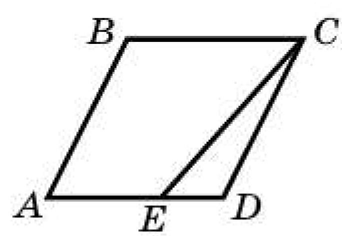


Рис. **14.9**

14.5. На каких из рисунков 14.10, *а—г* прямые a и b параллельны?

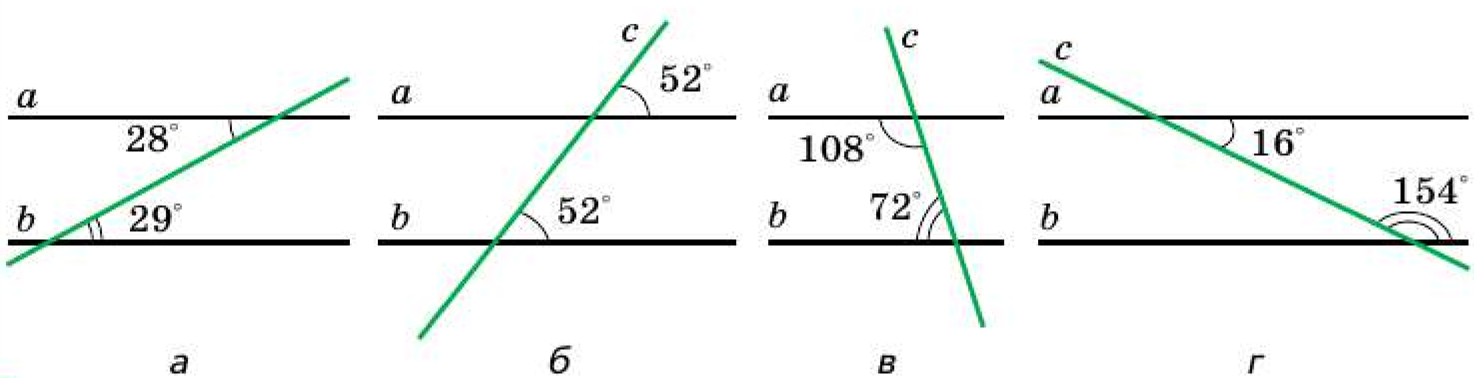


Рис. **14.10**

14.6. Параллельны ли изображённые на рисунке 14.11 прямые a и b, если:

1) $\angle 3 = \angle 6$;
2) $\angle 2 = \angle 6$;
3) $\angle 4 = 125°$, $\angle 6 = 55°$;
4) $\angle 2 = 35°$, $\angle 5 = 146°$;
5) $\angle 1 = 98°$, $\angle 6 = 82°$;
6) $\angle 1 = 143°$, $\angle 7 = 37°$?

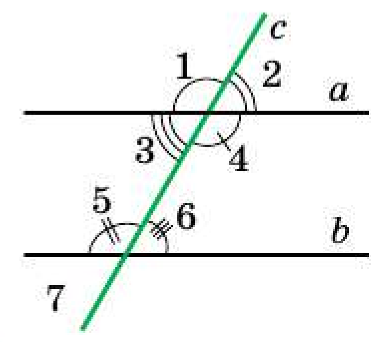


Рис. **14.11**

14.7. На каких из рисунков 14.12, *а—г* прямые m и n параллельны?

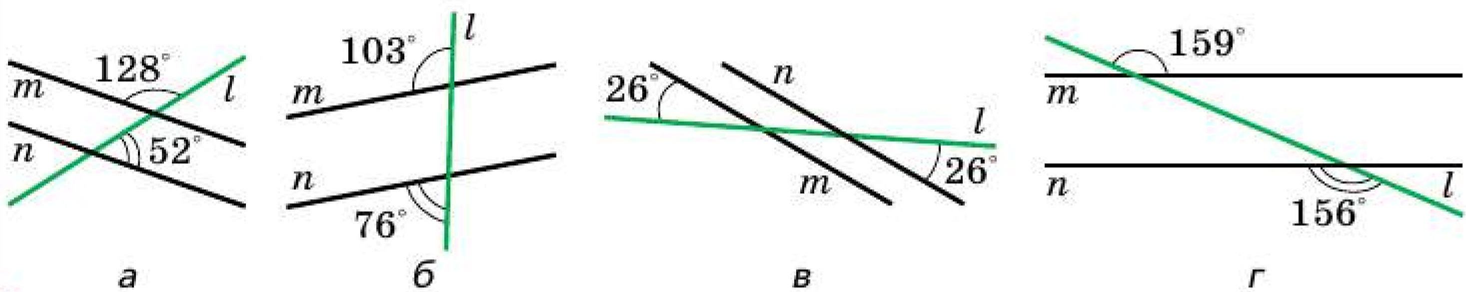


Рис. **14.12**

14.8. На рисунке 14.13 укажите все пары параллельных прямых.

14.9. Запишите, какие прямые на рисунке 14.14 являются параллельными, если $\angle 1 = 53°$, $\angle 2 = 128°$, $\angle 3 = 127°$.

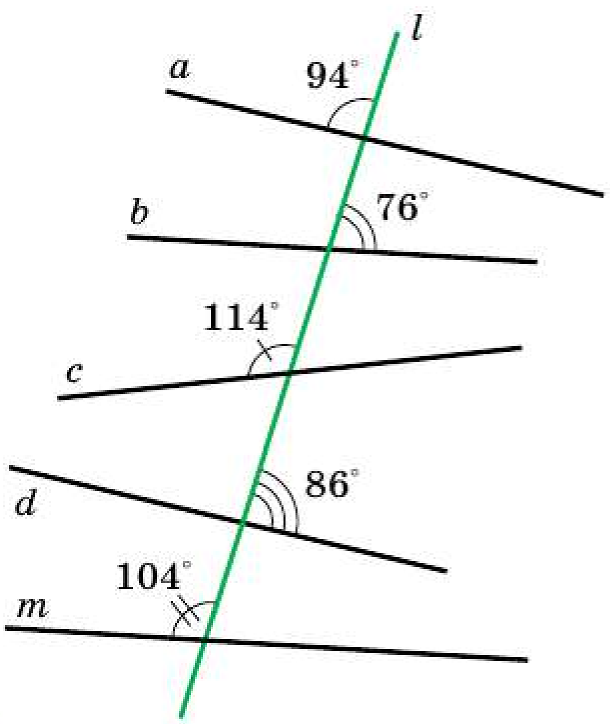


Рис. **14.13**

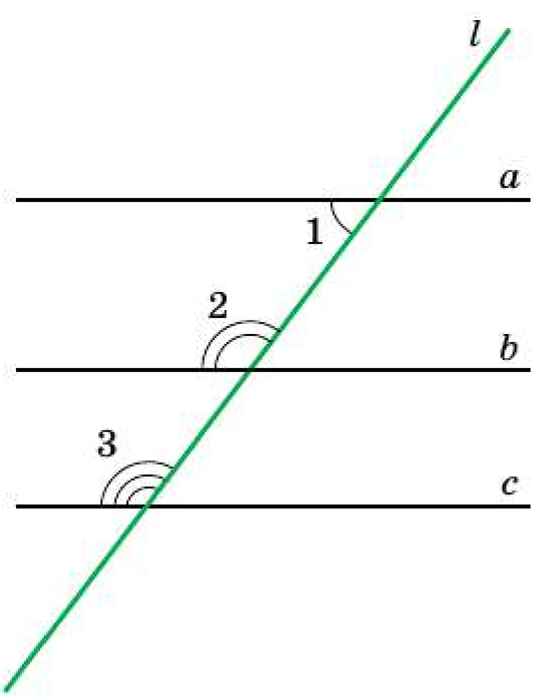


Рис. **14.14**

14.10. На рисунке 14.15 $AB = BC$, $CD = DK$. Докажите, что $AB \parallel DK$.

14.11. На рисунке 14.16 луч AK — биссектриса угла BAC, $AM = MK$. Докажите, что $MK \parallel AC$.

14.12. На рисунке 14.17 $\angle ACB = \angle ACD$, $AD = CD$. Докажите, что $BC \parallel AD$.

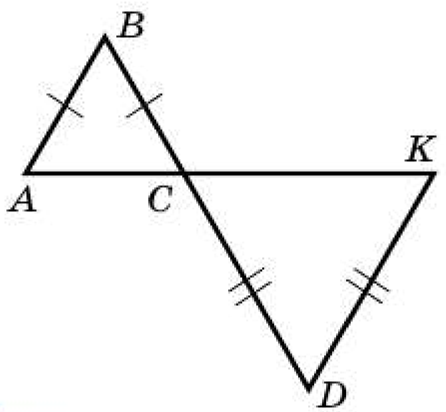


Рис. 14.15

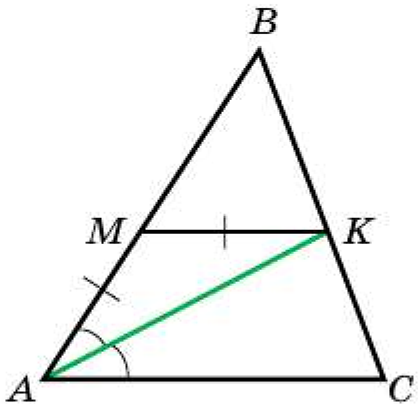


Рис. 14.16

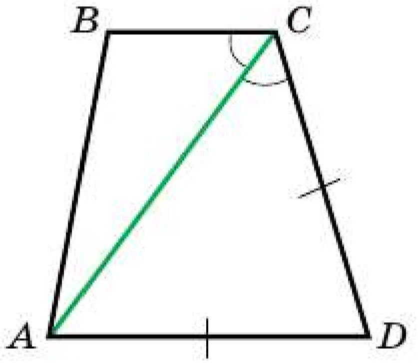


Рис. 14.17

14.13. В треугольнике ABC $AB = BC$, $\angle A = 60°$, угол BCD смежный с углом ACB, луч CM — биссектриса угла BCD. Докажите, что $AB \parallel CM$.

14.14. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O и делятся этой точкой пополам. Докажите, что $AC \parallel BD$.

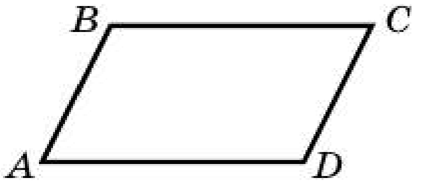


Рис. 14.18

14.15. На рисунке 14.18 $AB = CD$, $BC = AD$. Докажите, что $AB \parallel CD$.

14.16. На рисунке 14.19 изображены прямые a, b и k. Известно, что некоторая прямая m пересекает прямую a. Пересекает ли прямая m прямую b?

14.17. Каково взаимное расположение прямых CD и EF на рисунке 14.20?

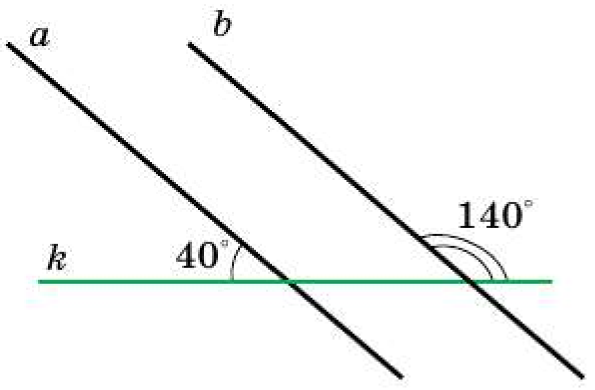


Рис. 14.19

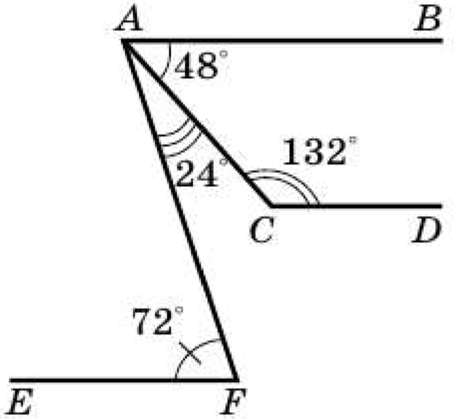


Рис. 14.20

14.18. Угол ABC равен $60°$, а угол BCD — $120°$. Можно ли утверждать, что прямые AB и CD параллельны?

14.19. Угол между прямыми a и c равен углу между прямыми b и c. Можно ли утверждать, что прямые a и b параллельны?

14.20. Из восьми углов, образованных при пересечении прямых a и b прямой c, четыре угла равны $40°$, а четыре угла равны $140°$. Можно ли утверждать, что прямые a и b параллельны?

◆ ◆ ◆

14.21. Прямая пересекает биссектрису BM треугольника ABC в точке O, являющейся серединой отрезка BM, а сторону BC — в точке K. Докажите, что если $OK \perp BM$, то $MK \parallel AB$.

14.22. Отрезки AM и CK — медианы треугольника ABC. На продолжении отрезка AM за точку M отложен отрезок MF, а на продолжении отрезка CK за точку K — отрезок KD так, что $MF = AM$, $KD = CK$. Докажите, что точки B, D и F лежат на одной прямой.

14.23. На рисунке 14.21 $\angle BAD = \angle BCD$. Биссектриса угла B пересекает отрезок AD в точке P. На отрезке BC выбрана такая точка Q, что $AQ \perp BP$. Докажите, что $PQ \parallel DC$.

14.24. На рисунке 14.22 $\angle ABC = 30°$, $\angle BCD = 70°$ и $\angle CDE = 40°$. Докажите, что $AB \parallel DE$.

14.25. На рисунке 14.23 $\angle ABC = 120°$, $\angle BCD = 80°$ и $\angle CDE = 160°$. Докажите, что $AB \parallel DE$.

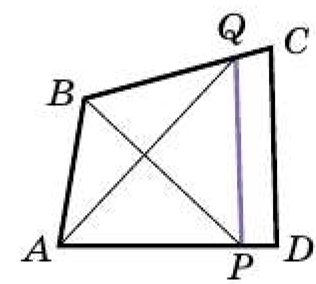


Рис. **14.21**

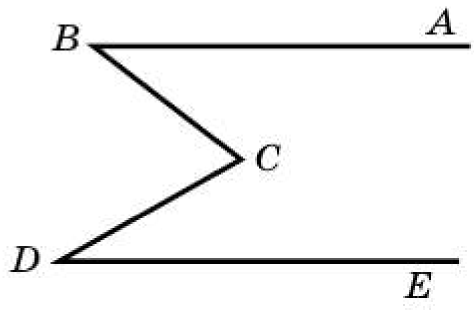


Рис. **14.22**

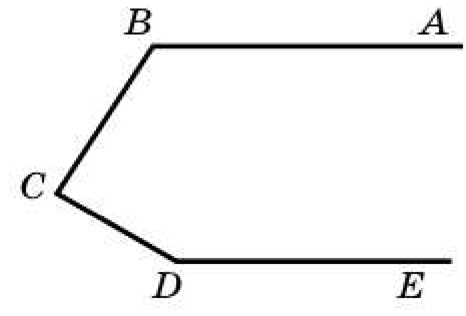


Рис. **14.23**

14.26. Биссектрисы углов A и C треугольника ABC пересекаются в точке O. На сторонах AB и BC выбраны соответственно точки M и N так, что $MA = MO$ и $NO = NC$. Докажите, что точки M, O и N лежат на одной прямой.

Пятый постулат Евклида

В § 6 вы узнали, что в качестве аксиом выбирают очевидные утверждения. Тогда почему бы, например, теоремы 1.1 и 5.1 не включить в список аксиом, ведь они тоже очевидны? Ответ на этот вопрос понятен: если какое-то утверждение можно доказать с помощью аксиом или уже доказанных теорем, то это утверждение — теорема, а не аксиома.

С этой точки зрения очень поучительна история, связанная с пятым постулатом Евклида (напомним, что в рассказе «Из истории геометрии» мы сформулировали четыре первых постулата).

V постулат **И чтобы всякий раз, когда прямая при пересечении с двумя другими прямыми образует с ними односторонние углы, сумма которых меньше двух прямых углов, эти прямые пересекались с той стороны от секущей, с которой эта сумма меньше двух прямых углов** (рис. 14.24).

Можно показать, что пятый постулат и сформулированная нами в § 13 аксиома параллельности прямых равносильны, т. е. из постулата следует аксиома и наоборот — из аксиомы следует постулат.

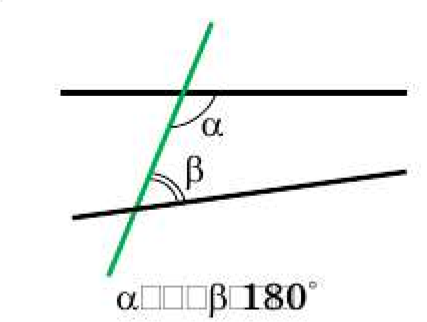


Рис. **14.24**

Более двадцати веков многие учёные пытались доказать пятый постулат, т. е. вывести его из других аксиом Евклида. Лишь в начале XIX в. несколько математиков независимо друг от друга пришли к выводу: утверждение, что *через данную точку, не лежащую на данной прямой, можно провести только одну прямую, параллельную данной*, является аксиомой.

Вам может показаться, что в этом выводе ничего особенного нет: присоединяем аксиому параллельности к уже существующему списку аксиом-правил, а дальше доказываем теоремы.

Однако если в футболе добавить хотя бы одно правило, например разрешить полевым игрокам играть и руками, то мы получим совершенно другую игру.

Если пятый постулат — это правило, которое мы принимаем, а не теорема, то его можно заменить другим правилом — утверждением, противоположным ему.

Так и поступил выдающийся русский математик Н. И. Лобачевский. Он заменил лишь одно правило — аксиому параллельности прямых — другим: *через точку, не лежащую на данной прямой, проходят по крайней мере две прямые, не пересекающие данную*. Новая аксиома позволила построить новую геометрию — неевклидову.

С подобной идеей несколько позже выступил венгерский математик Янош Бойяи (1802—1860).

Николай Иванович Лобачевский (1792—1856)

Выдающийся русский математик, профессор Казанского университета

§ 15 Свойства параллельных прямых

Теорема 15.1

(обратная теореме 14.1)

Если две параллельные прямые пересечены секущей, то углы, образующие пару накрест лежащих углов, равны.

Доказательство

На рисунке 15.1 прямые a и b параллельны, прямая c — секущая. Докажем, что $\angle 1 = \angle 2$.

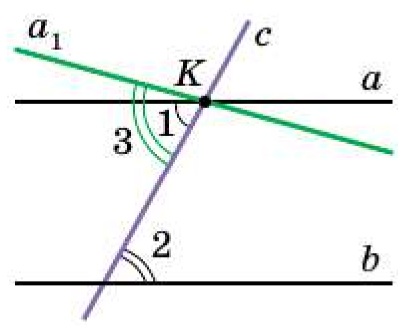


Рис. 15.1

Предположим, что $\angle 1 \neq \angle 2$. Тогда через точку K проведём прямую a_1 так, чтобы $\angle 3 = \angle 2$ (рис. 15.1). Углы 3 и 2 являются накрест лежащими при прямых a_1 и b и секущей c. Тогда по признаку параллельности двух прямых (теорема 14.1) $a_1 \parallel b$. Получили, что через точку K проходят две прямые, параллельные прямой b. Это противоречит аксиоме параллельности прямых. Таким образом, наше предположение неверно, и, следовательно, $\angle 1 = \angle 2$. ■

Теорема 15.2

(обратная теореме 14.3)

Если две параллельные прямые пересечены секущей, то углы, образующие пару соответственных углов, равны.

Доказательство

На рисунке 15.2 прямые a и b параллельны, прямая c — секущая. Докажем, что $\angle 1 = \angle 2$.

По свойству параллельных прямых (теорема 15.1) углы 3 и 2 равны как накрест лежащие при параллельных прямых a и b и секущей c. Но углы 3 и 1 равны как вертикальные. Следовательно, $\angle 1 = \angle 2$. ■

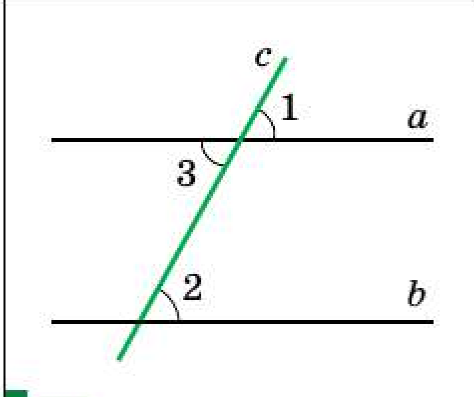


Рис. 15.2

Теорема 15.3

(обратная теореме 14.2)

Если две параллельные прямые пересечены секущей, то сумма углов, образующих пару односторонних углов, равна $180°$.

Доказательство

На рисунке 15.3 прямые a и b параллельны, прямая c — секущая. Докажем, что $\angle 1 + \angle 2 = 180°$.

По свойству параллельных прямых (теорема 15.1) углы 3 и 2 равны как накрест лежащие при параллельных прямых a и b и секущей c. Но углы 3 и 1 смежные, поэтому $\angle 1 + \angle 3 = 180°$. Следовательно, $\angle 1 + \angle 2 = 180°$. ■

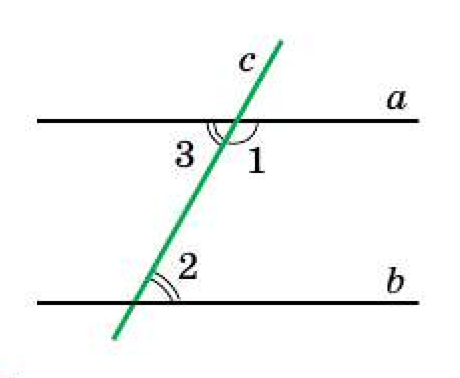


Рис. 15.3

Следствие

Если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой (рис. 15.4).

Докажите это следствие самостоятельно.

Заметим, что с доказательством этого утверждения, не использующим теорему 15.3, вы познакомились, решая задачу 13.12.

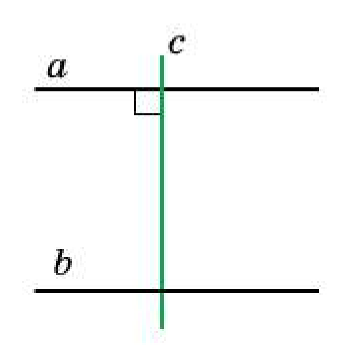


Рис. 15.4

Задача 1. Докажите, что все точки одной из двух параллельных прямых равноудалены от другой прямой.

Решение. Пусть прямые a и b параллельны (рис. 15.5), M и N — две произвольные точки прямой a. Опустим из них перпендикуляры MK и NP на прямую b. Докажем, что $MK = NP$.

Рассмотрим треугольники MKN и PNK. Отрезок KN — их общая сторона. Поскольку $MK \perp b$ и $NP \perp b$, то $MK \parallel NP$, а углы MKN и PNK равны как накрест лежащие при параллельных прямых MK и NP и секущей KN.

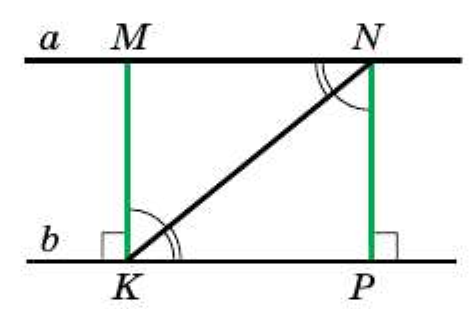


Рис. 15.5

Аналогично углы MNK и PKN равны как накрест лежащие при параллельных прямых MN и KP и секущей KN. Следовательно, треугольники MKN и PNK равны по стороне и двум прилежащим углам, т. е. по второму признаку равенства треугольников. Тогда $MK = NP$. ■

В § 5 вы познакомились с понятием расстояния от точки до фигуры. Аналогично вводят понятие расстояния между двумя произвольными фигурами: ищут отрезок наименьшей длины, соединяющий точки данных фигур. Если такой отрезок удаётся найти, то его длину называют **расстоянием между двумя данными фигурами**.

В § 17 будет доказано, что если из одной точки к прямой проведены перпендикуляр и наклонная, то перпендикуляр меньше наклонной. Отсюда в свою очередь следует, что перпендикуляр, опущенный из любой точки одной из параллельных прямых на другую, не больше любого отрезка, концы которого лежат на данных параллельных прямых (рис. 15.6). Поэтому целесообразно принять следующее определение.

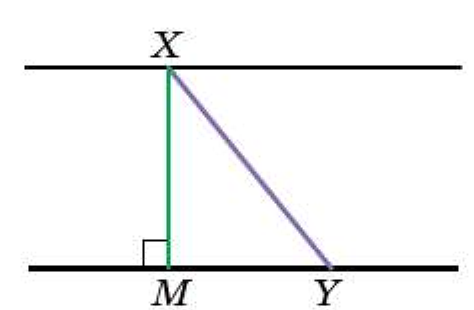


Рис. 15.6

Определение

Расстоянием между двумя параллельными прямыми называют расстояние от любой точки одной из прямых до другой прямой.

Например, на рисунке 15.5 длина отрезка MK — это расстояние между параллельными прямыми a и b.

Задача 2. На рисунке 15.7 отрезок AK — биссектриса треугольника ABC, $MK \parallel AC$. Докажите, что треугольник AMK равнобедренный.

Решение. Поскольку отрезок AK — биссектриса треугольника ABC, то $\angle MAK = \angle KAC$.

Углы KAC и MKA равны как накрест лежащие при параллельных прямых MK и AC и секущей AK. Следовательно, $\angle MAK = \angle MKA$.

Тогда треугольник AMK равнобедренный. ■

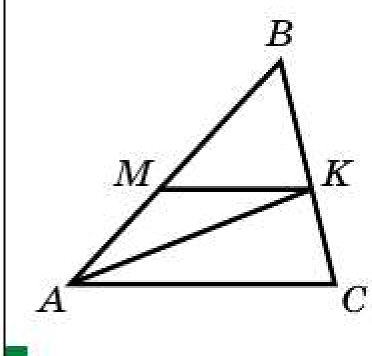


Рис. 15.7

1. Каким свойством обладают накрест лежащие углы, образованные при пересечении двух параллельных прямых секущей?
2. Каким свойством обладают соответственные углы, образованные при пересечении двух параллельных прямых секущей?
3. Каким свойством обладают односторонние углы, образованные при пересечении двух параллельных прямых секущей?
4. Известно, что прямая перпендикулярна одной из двух параллельных прямых. Обязательно ли она перпендикулярна другой прямой?
5. Что называют расстоянием между двумя параллельными прямыми?

Упражнения

15.1. На рисунке 15.8 найдите угол 1.

15.2. На рисунке 15.9 найдите угол 2.

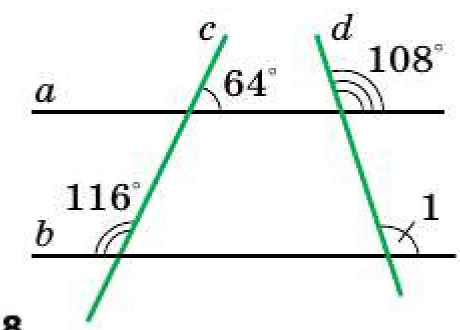


Рис. 15.8

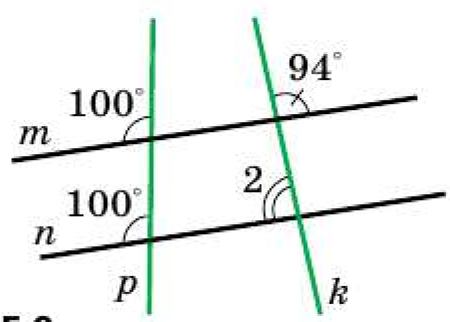


Рис. 15.9

15.3. Разность односторонних углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых секущей, равна 50°. Найдите эти углы.

15.4. Один из односторонних углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых секущей, в 4 раза больше другого. Найдите эти углы.

15.5. Найдите все углы, образованные при пересечении двух параллельных прямых секущей, если:
1) один из этих углов равен 48°;
2) отношение градусных мер двух из этих углов равно 2 : 7.

15.6. Найдите все углы, образованные при пересечении двух параллельных прямых секущей, если один из них на 24° меньше другого.

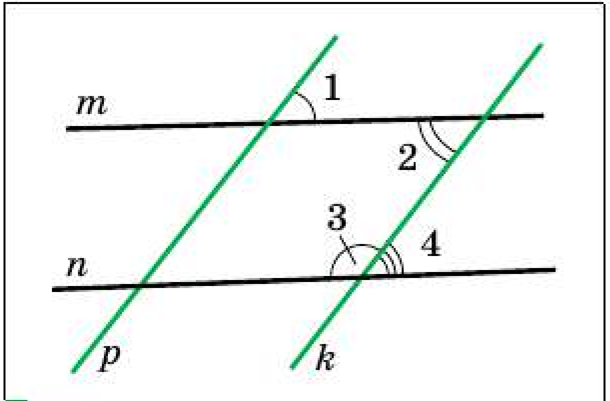


Рис. 15.10

15.7. На рисунке 15.10 $m \parallel n$, $p \parallel k$, $\angle 1 = 50°$. Найдите углы 2, 3 и 4.

15.8. Прямая, параллельная основанию AC равнобедренного треугольника ABC, пересекает его боковые стороны AB и BC в точках D и F соответственно. Докажите, что треугольник DBF равнобедренный.

15.9. Прямая, параллельная стороне AC равностороннего треугольника ABC, пересекает его стороны AB и BC в точках D и F соответственно. Докажите, что треугольник DBF равносторонний.

15.10. На продолжениях сторон AC и BC равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) за точки A и B отметили соответственно точки P и K так, что $PK \parallel AB$. Докажите, что треугольник KPC равнобедренный.

15.11. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O, $AO = BO$, $AC \parallel BD$. Докажите, что $CO = DO$.

15.12. Отрезки MK и DE пересекаются в точке F, $DK \parallel ME$, $DK = ME$. Докажите, что $\triangle MEF = \triangle KDF$.

15.13. Ответьте на вопросы.
1) Могут ли оба односторонних угла при двух параллельных прямых и секущей быть тупыми?
2) Может ли сумма накрест лежащих углов при двух параллельных прямых и секущей быть равной 180°?
3) Могут ли быть равными односторонние углы при двух параллельных прямых и секущей?

15.14. На рисунке 15.11 $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$. Докажите, что $BC = AD$.

15.15. На рисунке 15.11 $BC = AD$, $BC \parallel AD$. Докажите, что $AB \parallel CD$.

15.16. На рисунке 15.12 $MK \parallel EF$, $ME = EF$, $\angle KMF = 70°$. Найдите угол MEF.

15.17. Через вершину B треугольника ABC (рис. 15.13) провели прямую MK, параллельную прямой AC, $\angle MBA = 42°$, $\angle CBK = 56°$. Найдите углы треугольника ABC.

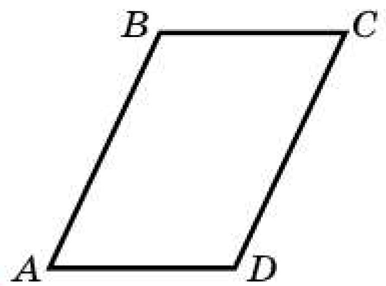


Рис. 15.11

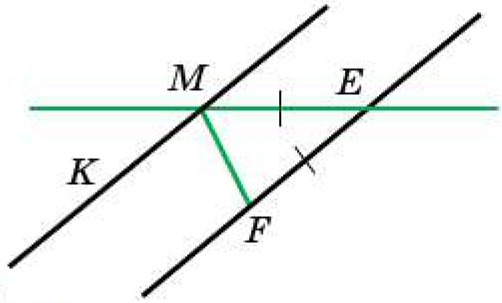


Рис. 15.12

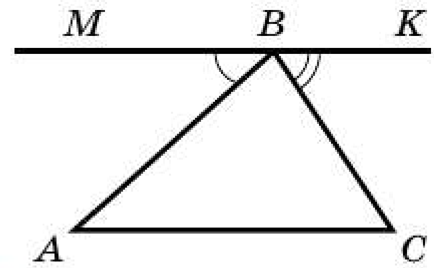


Рис. 15.13

15.18. Из вершины B равнобедренного треугольника ABC провели луч BK параллельно основанию AC. Докажите, что этот луч является биссектрисой угла, смежного с углом ABC.

15.19. Прямая, проведённая через вершину A треугольника ABC параллельно его противолежащей стороне, образует со стороной AC угол, равный углу BAC. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

15.20. На рисунке 15.14 $\angle MAB = 50°$, $\angle ABK = 130°$, $\angle ACB = 40°$, луч CE — биссектриса угла ACD. Найдите углы треугольника ACE.

15.21. На рисунке 15.15 $BE \perp AK$, $CF \perp AK$, луч CK — биссектриса угла FCD, $\angle ABE = 62°$. Найдите угол ACK.

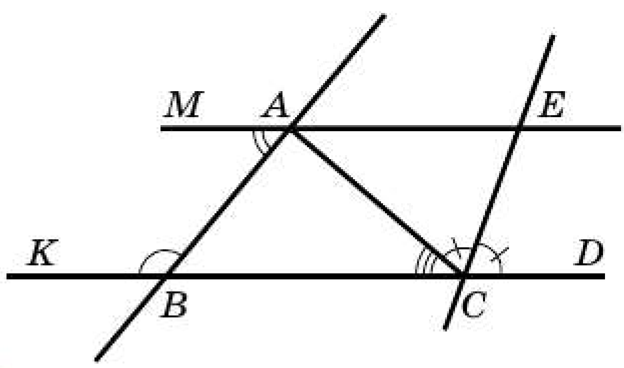


Рис. 15.14

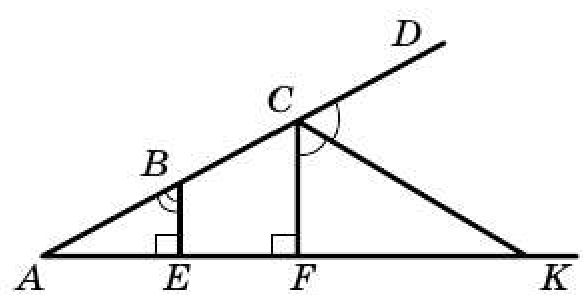


Рис. 15.15

15.22. На рисунке 15.16 $BC \parallel MK$, $BK = KE$, $CK = KD$. Докажите, что $AD \parallel MK$.

15.23. На рисунке 15.17 $AB = AC$, $AF = FE$, $AB \parallel EF$. Докажите, что $AE \perp BC$.

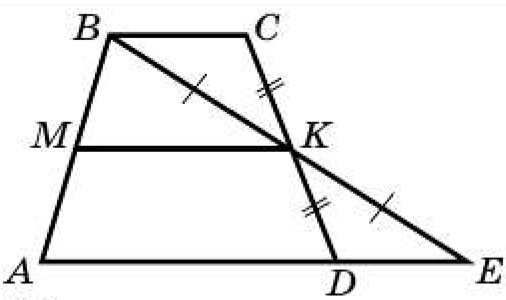


Рис. 15.16

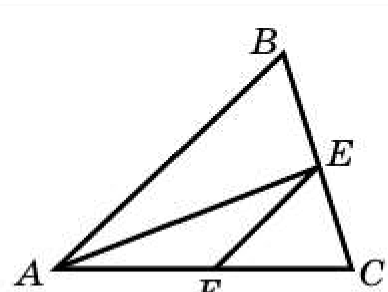


Рис. 15.17

15.24. На сторонах AB и BC треугольника ABC отметили соответственно точки M и D так, что $MD \parallel AC$ и $\angle MDA = \angle MDB$. Известно, что $AD = 6$ см. Найдите DC.

15.25. Треугольник ABC — равнобедренный с основанием AC. Через произвольную точку M его биссектрисы BD проведены прямые, параллельные его сторонам AB и BC и пересекающие отрезок AC в точках E и F соответственно. Докажите, что $DE = DF$.

15.26. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведены биссектрисы AM и CN. Докажите, что угол BMN в два раза больше угла AMN.

15.27. На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC отметили соответственно точки N и M так, что $AN = CM$. Известно, что угол BMN в два раза больше угла AMN. Докажите, что отрезки AM и CN — биссектрисы треугольника ABC.

15.28. На рисунке 15.18 $AB \parallel DE$. Докажите, что $\angle BCD = \angle ABC + \angle CDE$.

15.29. На рисунке 15.19 $AB \parallel DE$, $\angle ABC = 120°$, $\angle CDE = 150°$. Докажите, что $BC \perp CD$.

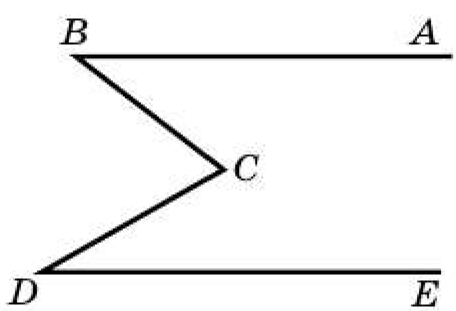


Рис. **15.18**

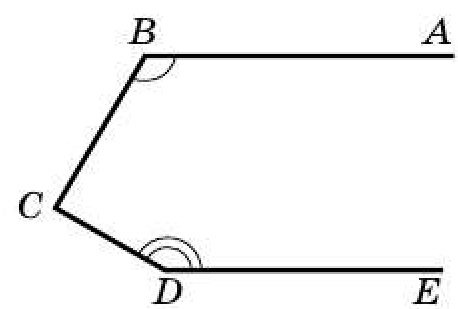


Рис. **15.19**

15.30. Через вершину B треугольника ABC провели прямую, параллельную его биссектрисе AM. Эта прямая пересекает прямую AC в точке K. Докажите, что треугольник BAK равнобедренный.

15.31. Через точку O пересечения биссектрис AE и CF треугольника ABC провели прямую, параллельную прямой AC. Эта прямая пересекает сторону AB в точке M, а сторону BC — в точке K. Докажите, что $MK = AM + CK$.

15.32. Биссектрисы углов BAC и BCA треугольника ABC пересекаются в точке O. Через эту точку проведены прямые, параллельные прямым AB и BC и пересекающие сторону AC в точках M и K соответственно. Докажите, что периметр треугольника MOK равен длине стороны AC.

15.33. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) провели биссектрису AD. Известно, что $BD = AC$. Докажите, что $AD = AC$.

15.34. На сторонах AB, BC и AC равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) отметили соответственно точки M, D и K так, что $AM = 2DC$ и $\angle AMD = \angle KDC$. Докажите, что $MD = KD$.

15.35. На стороне AC равностороннего треугольника ABC отметили точку M, а на продолжении стороны BC за вершину C отметили точку N так, что $AM = CN$. Докажите, что $BM = MN$.

15.36. На стороне AC равностороннего треугольника ABC отметили точку M, а на продолжении стороны BC за вершину C отметили точку N так, что $BM = MN$. Докажите, что $AM = CN$.

15.37. На продолжении стороны AC равностороннего треугольника ABC за точку C отметили точку D, а на продолжении стороны BC за вершину C отметили точку E так, что $AD = CE$. Докажите, что $BD = DE$.

15.38. На сторонах AB, BC и AC равностороннего треугольника ABC отметили соответственно точки M, N и K так, что $BN = 2NC$, $CK = 2AK$ и $MK \perp NK$. Докажите, что $MN = 2AM$.

15.39. Точка D — середина стороны AC треугольника ABC. На стороне BC отметили точку E так, что $\angle BEA = \angle CED$. Известно, что $DE = 5$ см. Найдите отрезок AE.

15.40. В треугольнике ABC проведена медиана BM. На продолжении стороны AB за точку B отметили точку K. Известно, что $AB = 2BM$. Докажите, что луч BC является биссектрисой угла MBK.

§ 16 Сумма углов треугольника

Треугольник — ключевая фигура планиметрии. Мир треугольников разнообразен. Но всем им присуще свойство, которое раскрывает следующая теорема.

Теорема 16.1

Сумма углов треугольника равна $180°$.

Доказательство

Рассмотрим произвольный треугольник ABC. Требуется доказать, что $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.

Через вершину B проведём прямую a, параллельную прямой AC (рис. 16.1). Имеем: $\angle A$ и $\angle 1$ равны как накрест лежащие при параллельных прямых a и AC и секущей AB. Аналогично можно доказать, что $\angle C = \angle 3$. Но углы 1, 2 и 3 составляют развёрнутый угол с вершиной B. Следовательно, $\angle A + \angle ABC + \angle C = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$. ■

Следствие

Среди углов треугольника не менее двух углов острые.

Докажите это следствие самостоятельно.

Из этого следствия вытекает, что угол при основании равнобедренного треугольника всегда острый.

Определение

Внешним углом треугольника называют угол, смежный с углом этого треугольника.

На рисунке 16.2 углы 1, 2 и 3 являются внешними углами треугольника ABC.

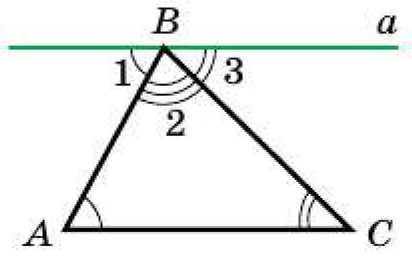


Рис. 16.1

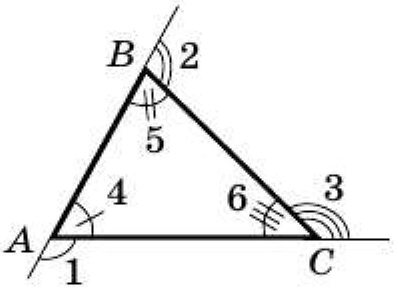


Рис. 16.2

Теорема 16.2

Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним.

Доказательство

На рисунке 16.2 углы 1, 2 и 3 — внешние углы треугольника ABC. Надо доказать, что $\angle 1 = \angle 5 + \angle 6$, $\angle 2 = \angle 4 + \angle 6$, $\angle 3 = \angle 4 + \angle 5$.

Докажем, например, первое из этих трёх равенств (остальные равенства доказывают аналогично).

По свойству смежных углов $\angle 1 + \angle 4 = 180°$. По теореме о сумме углов треугольника $\angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 180°$. Тогда $\angle 1 + \angle 4 = \angle 4 + \angle 5 + \angle 6$, отсюда $\angle 1 = \angle 5 + \angle 6$. ■

Следствие

Внешний угол треугольника больше каждого из углов треугольника, не смежных с ним.

Докажите это следствие самостоятельно.

Задача 1. В треугольнике ABC известно, что $\angle A = \alpha$. Биссектрисы углов B и C пересекаются в точке O. Докажите, что $\angle BOC = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$.

Решение. Для треугольника ABC имеем: $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$. Тогда $\angle B + \angle C = 180^\circ - \alpha$. Поскольку лучи BO и CO — биссектрисы соответственно углов ABC и ACB (рис. 16.3), то $\angle OBC + \angle OCB = \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha) = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$.

Для треугольника BOC имеем: $\angle OBC + \angle OCB + \angle BOC = 180^\circ$. Тогда $\angle BOC = 180^\circ - (\angle OBC + \angle OCB) = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$. ■

Задача 2. Отрезок BM — медиана треугольника ABC. Известно, что $\angle ABM = 40^\circ$ и $AB = 2BM$. Найдите угол ABC.

Решение. На продолжении отрезка BM за точку M отметим точку K так, что $BM = MK$. Соединим точки A и K (рис. 16.4).

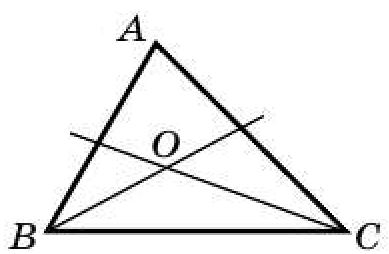


Рис. 16.3

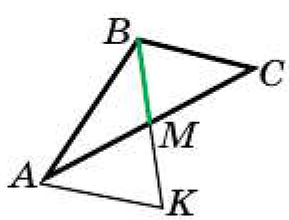


Рис. 16.4

Поскольку $BK = 2BM$, то $AB = BK$. Следовательно, треугольник ABK равнобедренный и $\angle BAK = \angle BKA$. Имеем: $\angle BAK = \angle BKA = 180^\circ - \angle ABK = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$. Тогда $\angle BAK = \angle BKA = 70^\circ$.

Легко показать (сделайте это самостоятельно), что треугольники AMK и CMB равны по первому признаку равенства треугольников. Тогда $\angle AKM + \angle CBM$ как соответственные углы равных треугольников. Получаем, что $\angle CBM = 70^\circ$. Тогда $\angle ABC = 110^\circ$.

Ответ: 110°. ■

?

1. Чему равна сумма углов треугольника?

2. Какое наименьшее количество острых углов есть в любом треугольнике?

3. Какой угол называют внешним углом треугольника?
4. Как связаны внешний угол треугольника и два угла треугольника, не смежные с ним?
5. Сравните внешний угол треугольника с углом треугольника, не смежным с ним.

Упражнения

16.1. Найдите угол треугольника, если два других его угла равны 35° и 96°.

16.2. Один из углов треугольника в 3 раза меньше второго угла и на 35° меньше третьего. Найдите углы треугольника.

16.3. Найдите углы треугольника, если их градусные меры относятся как 2 : 3 : 7.

16.4. Найдите углы равностороннего треугольника.

16.5. Найдите углы равнобедренного прямоугольного треугольника.

16.6. Угол при основании равнобедренного треугольника равен 63°. Найдите угол при вершине этого треугольника.

16.7. Найдите углы при основании равнобедренного треугольника, если угол при вершине равен 104°.

16.8. Найдите углы равнобедренного треугольника, если угол при вершине в 4 раза больше угла при основании.

16.9. Найдите углы равнобедренного треугольника, если угол при основании на 48° меньше угла при вершине.

16.10. Найдите углы равнобедренного треугольника, если один из них равен: 1) 110°; 2) 50°. Сколько решений имеет задача?

16.11. Найдите углы равнобедренного треугольника, если один из них равен: 1) 42°; 2) 94°. Сколько решений имеет задача?

16.12. В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 90°$, отрезок AK — биссектриса, $\angle BAK = 18°$. Найдите углы AKC и ABC.

16.13. В треугольнике ABC известно, что $AB = BC$, отрезок CK — биссектриса, $\angle A = 66°$. Найдите $\angle AKC$.

16.14. Биссектрисы AK и CM треугольника ABC пересекаются в точке O, $\angle BAC = 116°$, $\angle BCA = 34°$. Найдите угол AOC.

16.15. В равнобедренном треугольнике ABC с углом при вершине B, равным 36°, провели биссектрису AD. Докажите, что треугольники ADB и CAD равнобедренные.

16.16. В треугольнике ABC провели биссектрису BF. Найдите угол C, если $\angle A = 39°$, $\angle AFB = 78°$.

16.17. Докажите, что если один из углов треугольника равен сумме двух других углов, то этот треугольник прямоугольный.

16.18. На рисунке 16.5 укажите внешние углы:

1) при вершинах E и F треугольника MEF;

2) при вершине E треугольника MKE.

16.19. На рисунке 16.6 укажите треугольники, для которых внешним углом является: 1) угол AMB; 2) угол BMD.

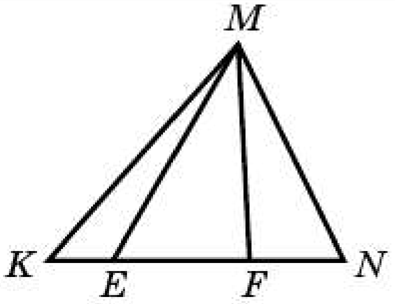


Рис. **16.5**

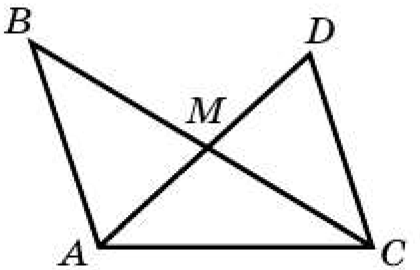


Рис. **16.6**

16.20. Один из внешних углов треугольника равен 75°. Найдите:

1) угол треугольника при этой вершине;

2) сумму двух углов треугольника, не смежных с ним.

16.21. Может ли внешний угол треугольника быть меньше смежного с ним угла треугольника? В случае утвердительного ответа укажите вид треугольника.

16.22. Определите вид треугольника, если один из его внешних углов равен смежному с ним углу треугольника.

16.23. Один из внешних углов треугольника равен 136°, а один из углов треугольника — 61°. Найдите неизвестный угол треугольника, не смежный с данным внешним.

16.24. Один из внешних углов треугольника равен 154°. Найдите углы треугольника, не смежные с ним, если один из этих углов на 28° больше другого.

16.25. Один из внешних углов треугольника равен 98°. Найдите углы треугольника, не смежные с ним, если один из этих углов в 6 раз меньше другого.

16.26. Найдите углы равнобедренного треугольника, если внешний угол при его вершине равен 38°.

16.27. Докажите, что если два угла одного треугольника равны соответственно двум углам другого треугольника, то и третьи углы этих треугольников равны.

16.28. В треугольнике ABC биссектрисы углов A и C пересекаются в точке O. Найдите угол AOC, если $\angle B = 100°$.

16.29. Найдите углы равнобедренного треугольника, если один из его внешних углов равен: 1) 54°; 2) 112°. Сколько решений имеет задача?

16.30. Внешний угол равнобедренного треугольника равен $130°$. Найдите углы треугольника. Сколько решений имеет задача?

16.31. Биссектрисы углов при основании AC равнобедренного треугольника ABC пересекаются в точке O. Докажите, что угол AOC равен внешнему углу треугольника ABC при вершине A.

16.32. На рисунке 16.7 $BC \parallel AD$, $\angle A = 25°$, $\angle B = 55°$. Найдите угол CMD.

16.33. Отрезок BK — биссектриса равнобедренного треугольника ABC с основанием BC, $\angle AKB = 105°$. Найдите углы треугольника ABC.

16.34. На стороне AB треугольника ABC отметили точку D так, что $BD = BC$, $\angle ACD = 15°$, $\angle DCB = 40°$. Найдите углы треугольника ABC.

16.35. На сторонах треугольника ABC (рис. 16.8) отметили точки E и F так, что $\angle 1 = \angle 2$. Докажите, что $\angle 3 = \angle 4$.

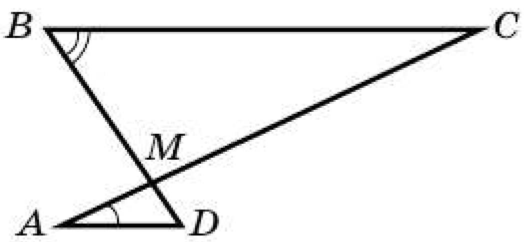


Рис. 16.7

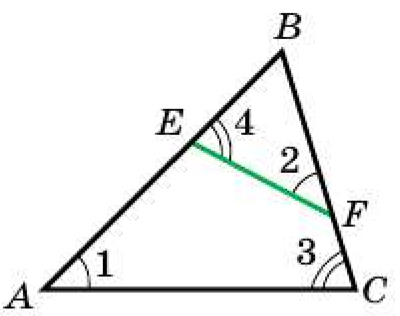


Рис. 16.8

16.36. На рисунке 16.9 $BC \parallel AD$, $\angle B = 100°$, $\angle ACD = 95°$, $\angle D = 45°$. Докажите, что $AB = BC$.

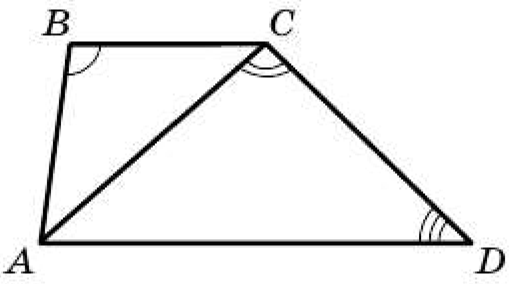


Рис. 16.9

16.37. Через вершину C треугольника ABC проведена прямая, параллельная биссектрисе AM треугольника и пересекающая прямую AB в точке K. Найдите углы треугольника AKC, если $\angle BAC = 70°$.

16.38. Докажите, что биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника параллельна его основанию.

16.39. Докажите, что если биссектриса внешнего угла треугольника параллельна его стороне, то этот треугольник равнобедренный.

16.40. Угол при основании AC равнобедренного треугольника ABC в 2 раза больше угла при вершине, отрезок AM — биссектриса треугольника. Докажите, что $BM = AC$.

16.41. Треугольник ABC равнобедренный с основанием AC. На стороне BC отметили точку M так, что $BM = AM = AC$. Найдите углы треугольника ABC.

16.42. Докажите, что в любом треугольнике существует угол: 1) не меньше $60°$; 2) не больше $60°$.

16.43. Определите вид треугольника, если:

1) один из его углов больше суммы двух других;

2) любой из его углов меньше суммы двух других.

16.44. Определите вид треугольника, если сумма любых двух его углов больше $90°$.

16.45. Существует ли треугольник, две биссектрисы которого перпендикулярны?

16.46. Существует ли треугольник, в котором одна биссектриса делит пополам другую биссектрису?

16.47. Высота CH и биссектриса AK прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$) пересекаются в точке M. Докажите, что треугольник CMK равнобедренный.

16.48. Высота CD и биссектриса BM треугольника ABC пересекаются в точке M. Известно, что $CM = CN$. Найдите угол ACB.

16.49. На продолжениях стороны AC треугольника ABC за точки A и C отметили соответственно точки M и N так, что $AB = AM$ и $CB = CN$. Известно, что $\angle ABC = 80°$. Найдите угол MBN.

16.50. На стороне AC треугольника ABC нашлись такие точки M и N, что $AB = AM$ и $CB = CN$ (точка N принадлежит отрезку AM). Известно, что $\angle ABC = 80°$. Найдите угол MBN.

16.51. В треугольнике ABC известно, что $AB = 2AC$ и $\angle A = 60°$. Найдите угол C.

16.52. В треугольнике ABC известно, что $AB = 2AC$ и $\angle B = 30°$. Найдите угол C.

◆ ◆ ◆

16.53. Найдите углы треугольника ABC, если биссектриса угла B разбивает его на два равнобедренных треугольника.

16.54. В треугольнике ABC известно, что $\angle A = \alpha$, биссектрисы внешних углов при вершинах B и C пересекаются в точке O. Найдите угол BOC.

16.55. На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC отметили соответственно точки E и F так, что $AC = AF = EF = BE$. Найдите углы треугольника ABC.

16.56. Петя Заплутайкин предложил такое доказательство теоремы о сумме углов треугольника: «Пусть S — сумма углов треугольника ABC. Проведём в треугольнике ABC отрезок BD

(рис. 16.10). Тогда $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = S$, $\angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = S$ Сложим эти два равенства: $2S = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6$. Имеем: $\angle 3 + \angle 4 = 180°$ как смежные углы. Отсюда $2S = \angle 1 + \angle 2 + 180° + \angle 5 + \angle 6$. Но $\angle 1 + \angle 2 + \angle 5 + \angle 6$ — это сумма углов треугольника ABC, т. е. эта сумма равна S. Отсюда: $2S = S + 180°$, $S = 180°$». Согласны ли вы с Петиным доказательством?

16.57. Найдите сумму углов, отмеченных на рисунке 16.11.

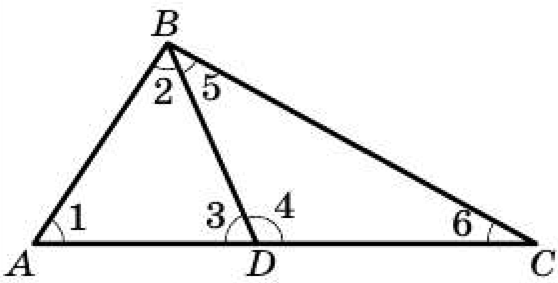


Рис. **16.10**

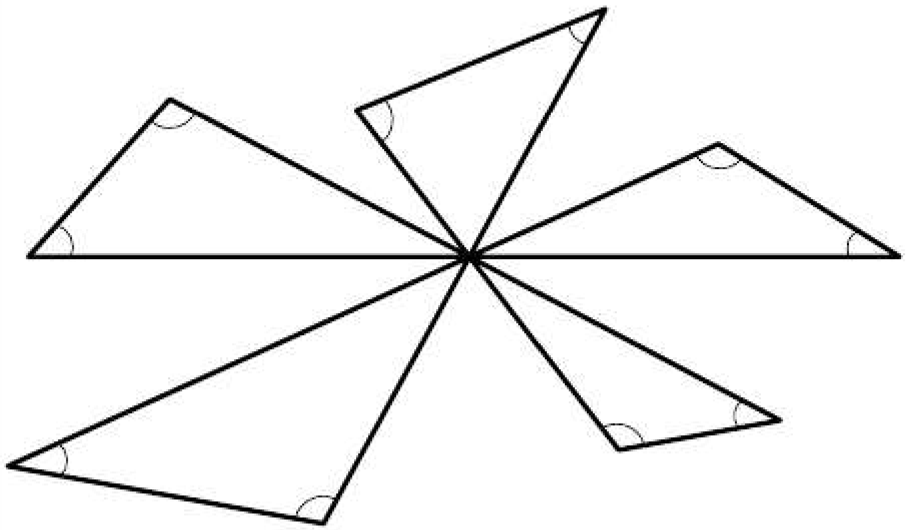


Рис. **16.11**

16.58. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) провели высоту CH. На сторонах AB и AC отметили соответственно точки M и N так, что $BM = BC$ и $CN = CH$. Докажите, что $MN \perp AC$.

16.59. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) провели высоту CD. Докажите, что биссектрисы углов ABC и ACD перпендикулярны.

16.60. На сторонах AC и AB прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$) отметили соответственно точки D и E так, что $BD = AD$ и $CB = CE$. Докажите, что $BD \perp CE$.

16.61. Точки M и N лежат на стороне AB, точка P — на стороне BC, точка Q — на стороне CA равностороннего треугольника ABC. Найдите угол между прямыми MP и NQ, если известно, что $MA + AQ = NB + BP = AB$.

16.62. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) $\angle ABC = 70°$. На стороне AC отметили точки E и F, а на сторонах AB и BC соответственно — точки P и Q так, что $AP + AE = CQ + CF = AC$. Найдите угол между прямыми PF и EQ.

16.63. В треугольнике ABC проведена медиана BM. Известно, что $\angle ABM = 80°$ и $\angle CBM = 50°$. Докажите, что $AB = 2BM$.

16.64. В равнобедренном треугольнике ABC известно, что $\angle BAC = 120°$. На продолжении стороны AC за точку A отметили точку D так, что $AD = 2AB$. Докажите, что треугольник BDC равнобедренный.

16.65. Угол BAC треугольника ABC равен $120°$. На биссектрисе этого угла взята точка D так, что $AD = AB + AC$. Докажите, что треугольник BDC равносторонний.

16.66. Угол C треугольника ABC равен $60°$. На продолжении стороны BC за точку C отметили точку D так, что $DC + CA = BC$. Докажите, что треугольник ABD равнобедренный.

16.67. На рисунке 16.12 $\angle BAD = \angle CDA = 60°$ и $\angle CAD = \angle CDB$. Докажите, что $AB + CD = AD$.

16.68. В треугольнике ABC проведена высота CD. Известно, что $\angle ACB = 135°$ и $BD - AD = AC$. Найдите угол CBA.

16.69. В треугольнике ABC известно, что $\angle B = 20°$, $\angle C = 40°$ и длина биссектрисы AM равна 2 см. Найдите разность $BC - AB$.

16.70. В треугольнике ABC провели высоту BD. Известно, что $\angle ACB = 80°$ и $AC - BC = 2DC$. Найдите угол ABC.

16.71. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ известно, что $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$ и $AC + AB = A_1C_1 + A_1B_1$. Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

16.72. Докажите равенство треугольников по двум углам и периметру.

16.73. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ известно, что $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$ и $AC - AB = A_1C_1 - A_1B_1$. Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

16.74. На координатной плоскости отмечены точки H (–1; 2) и M (3; –1). Найдите угол HOM, где O — начало координат.

16.75. Плоскость расчерчена на равносторонние треугольники, как показано на рисунке 16.13. Найдите величину угла ABC.

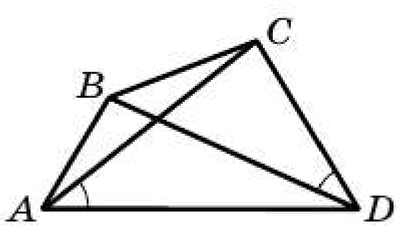


Рис. 16.12

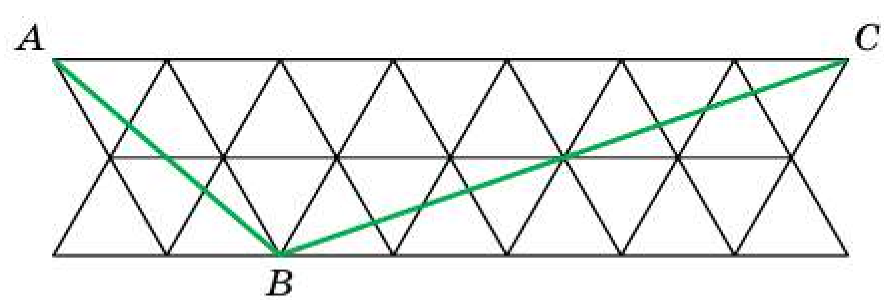


Рис. 16.13

16.76. На листе бумаги нарисовали равносторонний треугольник и полностью накрыли его двумя другими равносторонними треугольниками разных размеров. Докажите, что для покрытия хватило бы одного из этих треугольников.

16.77. В равнобедренном треугольнике ABC угол B, противолежащий основанию, равен $20°$. На стороне AB отметили точку D так, что $BD = AC$. Найдите угол ACD.

§ 17 Неравенство треугольника

Теорема 17.1
(неравенство треугольника)
Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон.

Доказательство

Рассмотрим треугольник ABC (рис. 17.1). Надо доказать, что: 1) $AB < AC + CB$; 2) $AC < AB + BC$; 3) $BC < BA + AC$.

Докажем первое из этих неравенств (два других можно доказать аналогично).

Пусть доказываемое неравенство неверно. Тогда $AB > AC + CB$ или $AB = AC + CB$.

1) Пусть $AB > AC + CB$. Тогда на стороне AB можно отметить точки C_1 и C_2 такие, что $AC = AC_1$ и $BC = BC_2$ (рис. 17.1). Поскольку мы предположили, что $AB > AC + CB$, то $AB > AC_1 + BC_2$. Следовательно, отрезки AC_1 и BC_2 не имеют общих точек.

Углы AC_1C и BC_2C являются острыми как углы при основании равнобедренных треугольников AC_1C и BC_2C соответственно. Тогда углы 1 и 2 являются тупыми как углы, смежные с острыми. Получили противоречие: в треугольнике C_1CC_2 два тупых угла.

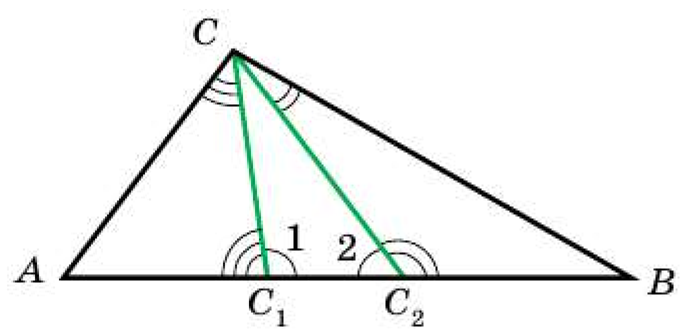


Рис. 17.1

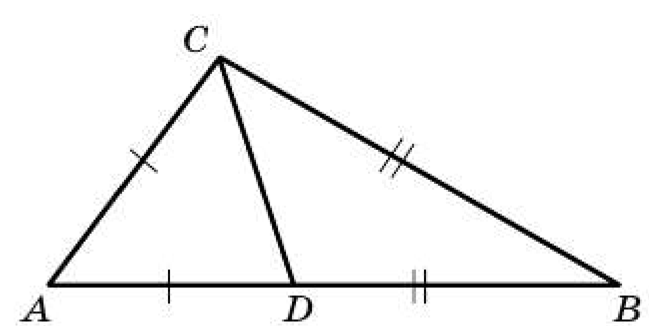


Рис. 17.2

2) Пусть $AB = AC + CB$. На стороне AB отметим точку D так, что $AC = AD$ (рис. 17.2). Тогда $BD = BC$. Углы ADC и BDC являются острыми как углы при основании равнобедренных треугольников ADC и BDC. Тогда их сумма меньше $180°$. Вместе с тем эти углы смежные. Получили противоречие. ■

Следствие

1) если длина одного из трёх данных отрезков не меньше суммы длин двух других, то эти отрезки не могут служить сторонами треугольника (рис. 17.3)**;**

2) каждая сторона треугольника больше разности двух других его сторон;

3) если для трёх точек A, B и C выполняется равенство $AB = AC + CB$, то точка C является внутренней точкой отрезка AB (рис. 17.4)**;**

4) для любых трёх точек A, B и C выполняются неравенства:

$$AB \leqslant AC + CB;$$
$$AC \leqslant AB + BC;$$
$$BC \leqslant BA + AC.$$

Докажем свойство 3) (свойства 1), 2) и 4) докажите самостоятельно).

Поскольку речь идёт о трёх точках, то точка C не может совпадать ни с точкой A, ни с точкой B. Предположим, что точка C не является внутренней точкой отрезка AB. Тогда точка C или не принадлежит прямой AB, или принадлежит прямой AB, но не принадлежит отрезку AB.

Если точка C не принадлежит прямой AB (рис. 17.5), то в силу неравенства треугольника можно записать $AB < AC + CB$. Но по условию $AB = AC + CB$. Получили противоречие.

Если точка C принадлежит прямой AB, но не принадлежит отрезку AB (рис. 17.6), то она расположена или на луче AM, или на луче BN. Для каждого из этих случаев легко убедиться (сделайте это самостоятельно), что равенство, указанное в условии, не выполняется.

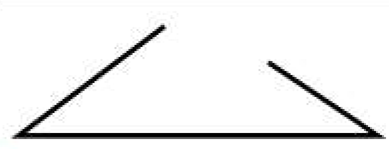


Рис. 17.3

Рис. 17.4

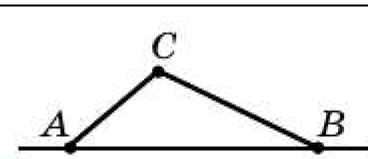


Рис. 17.5

Рис. 17.6

Заметим, что доказанное свойство является утверждением, обратным основному свойству длины отрезка, сформулированному в § 2.

В § 25 будет показано, что если каждый из трёх данных отрезков меньше суммы двух других, то эти отрезки могут служить сторонами треугольника.

Вы уже знаете, что в треугольнике против равных сторон лежат равные углы, и наоборот: против равных углов лежат равные стороны (§ 9, 10). Эти свойства дополняет следующая теорема.

Теорема 17.2

В треугольнике против большей стороны лежит больший угол, и наоборот, против большего угла лежит бóльшая сторона.

Доказательство

1) Рассмотрим треугольник ABC, в котором $AB > BC$. Надо доказать, что $\angle ACB > \angle A$ (рис. 17.7).

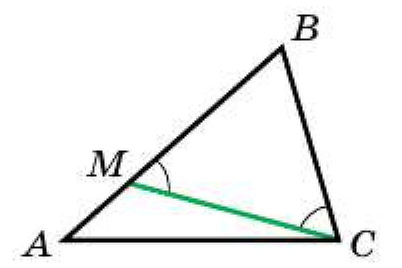


Рис. 17.7

Поскольку $AB > BC$, то на стороне AB найдётся такая точка M, что $BM = BC$. Получили равнобедренный треугольник MBC, в котором $\angle BMC = \angle BCM$.

Так как угол BMC — внешний угол треугольника AMC, то $\angle BMC > \angle A$. Следующая «цепочка» неравенств доказывает первую часть теоремы:

$$\angle ACB > \angle MCB = \angle BMC > \angle A.$$

2) Рассмотрим треугольник ABC, в котором $\angle C > \angle A$. Надо доказать, что $AB > BC$.

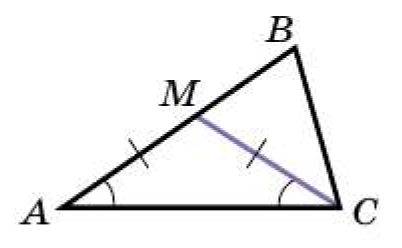


Рис. 17.8

Поскольку $\angle ACB > \angle A$, то угол ACB можно разделить на два угла ACM и MCB так, что $\angle ACM = \angle A$ (рис. 17.8). Тогда треугольник AMC равнобедренный с равными сторонами MA и MC.

Для сторон треугольника BMC запишем неравенство треугольника: $MC + MB > BC$. Имеем: $AB = AM + MB = MC + MB > BC$. ■

Заметим, что вторую часть теоремы 17.2 можно доказать методом от противного: предположить, что $BC \geqslant AB$, а далее воспользоваться уже доказанной первой частью теоремы. Проведите это доказательство самостоятельно.

В § 5, рассматривая понятие расстояния от точки до фигуры, мы пользовались целым рядом фактов, не доказывая их. Теперь с помощью теоремы 17.2 мы можем эти факты доказать.

Следствие

Если из одной точки, не лежащей на прямой, к этой прямой проведены перпендикуляр и наклонная, то перпендикуляр меньше наклонной.

Доказательство

На рисунке 17.9 отрезок AB — перпендикуляр, отрезок AX — наклонная. В треугольнике ABX угол ABX прямой, а угол AXB острый. Следовательно, $\angle ABX > \angle AXB$. Тогда в силу теоремы 17.2 получаем, что $AB < AX$. ■

Пусть точка O не принадлежит прямой AB и основание перпендикуляра OM, опущенного из точки O на прямую AB, принадлежит отрезку AB (лучу AB) (рис. 17.10). Из сформулированного выше следствия получаем, что отрезок OM меньше любого другого отрезка, соединяющего точку O с точкой прямой AB (отрезка AB, луча AB). Следовательно, длина отрезка OM — это расстояние от точки M до прямой AB (отрезка AB, луча AB).

Пусть теперь основание перпендикуляра OM не принадлежит отрезку AB (лучу AB) (рис. 17.11). Угол OAM является острым углом прямоугольного треугольника OAM. Следовательно, смежный с ним угол OAX является тупым. Значит, в любом треугольнике OAX, где X — произвольная точка отрезка AB (луча AB), угол OAX является наибольшим. Тогда из теоремы 17.2 следует, что $OA < OX$. Таким образом, при описанном взаимном расположении точки O и отрезка AB (луча AB) (см. рис. 17.11) длина отрезка OA является расстоянием от точки O до отрезка AB (луча AB).

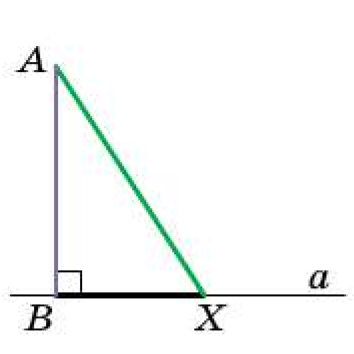


Рис. 17.9

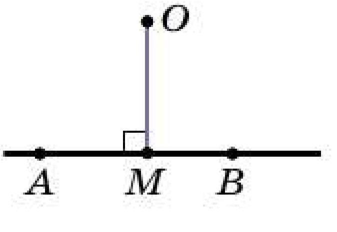


Рис. 17.10

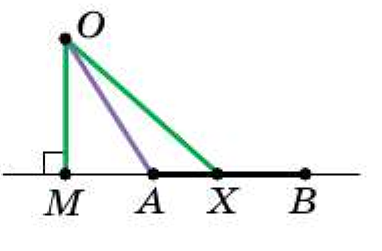


Рис. 17.11

Задача. Из точки M, не принадлежащей прямой a, проведены две наклонные MA и MB и перпендикуляр MD (точка D принадлежит отрезку AB). Докажите, что если $DA > DB$, то $MA > MB$.

Решение. По условию $DA > DB$ (рис. 17.12). На отрезке DA отметим точку K так, что $DK = DB$. В треугольнике KMB отрезок MD является медианой и высотой. Следовательно, этот треугольник равнобедренный. Тогда угол MKD является острым, а смежный с ним угол AKM — тупым. Из теоремы 17.2 следует, что в тупоугольном треугольнике против тупого угла лежит наибольшая сторона. Значит, $MA > MK$. Но $MK = MB$. Следовательно, $MA > MB$. ■

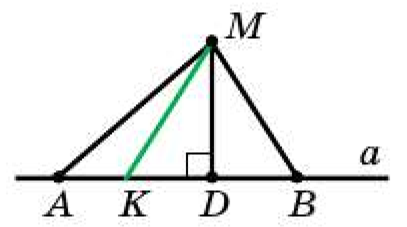


Рис. **17.12**

1. Сформулируйте теорему о неравенстве треугольника.
2. Сформулируйте теорему о соотношении между сторонами и углами треугольника.

Упражнения

17.1. Периметр треугольника равен 30 см. Может ли одна из его сторон быть равной: 1) 20 см; 2) 15 см?

17.2. Длины двух сторон треугольника равны 7 см и 9 см. Может ли периметр этого треугольника быть равным: 1) 20 см; 2) 32 см; 3) 18 см?

17.3. Существует ли треугольник, одна из сторон которого на 2 см меньше второй и на 6 см меньше третьей, а периметр равен 20 см?

17.4. Сравните углы треугольника ABC, если:
1) $AB > AC > BC$;
2) $AB = BC$, $BC > AC$.

17.5. В треугольнике ABC известно, что $\angle A = 34°$, $\angle B = 28°$. Сравните стороны AB, BC и AC.

17.6. Сравните стороны треугольника ABC, если:
1) $\angle C > \angle A > \angle B$;
2) $\angle B > \angle C$, $\angle A = \angle B$.

17.7. Лежат ли точки P, R и T на одной прямой, если:
1) $PR = 1{,}8$ см, $PT = 3{,}4$ см, $PT = 1{,}6$ см;
2) $PR = 2{,}4$ см, $PT = 5{,}6$ см, $RT = 7{,}2$ см?
В случае утвердительного ответа укажите, какая точка лежит между двумя другими. Ответ обоснуйте.

17.8. Может ли точка E лежать между точками C и D, если $CE = 6{,}3$ см, $ED = 2{,}7$ см, $CD = 8{,}9$ см? Ответ обоснуйте.

17.9. Точки A, B и C расположены так, что $AB = 3{,}2$ см, $AC = 4{,}8$ см, $BC = 8$ см. Являются ли лучи AB и AC дополнительными?

◆ ◆

17.10. В треугольнике ABC угол B тупой. На продолжении стороны AB за точку A отметили произвольную точку D. Докажите, что $CD > AC$.

17.11. В треугольнике ABC известно, что $\angle C > 90°$. На стороне BC отметили произвольную точку D. Докажите, что $AD > AC$.

17.12. Докажите, что отрезок, соединяющий вершину равнобедренного треугольника с точкой, лежащей на его основании, не больше боковой стороны треугольника.

17.13. Докажите, что отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой, лежащей на противолежащей стороне, не больше хотя бы одной из двух других сторон.

17.14. Две стороны равнобедренного треугольника равны 9 см и 20 см. Найдите третью сторону треугольника.

17.15. Две стороны равнобедренного треугольника равны 8 см и 16 см. Найдите длину основания этого треугольника.

17.16. Основание D высоты AD треугольника ABC является внутренней точкой отрезка BC. Известно, что $\angle BAD > \angle CAD$. Сравните длины сторон AB и AC.

17.17. Основание D высоты AD треугольника ABC является внутренней точкой отрезка BC. Известно, что $AB > AC$. Сравните величины углов BAD и CAD.

17.18. Докажите, что в треугольнике любая сторона меньше половины периметра.

17.19. В треугольнике ABC провели биссектрису BD. Докажите, что $AB > AD$ и $BC > CD$.

17.20. На стороне AC треугольника ABC отметили точку D. Известно, что $AD > BD$. Докажите, что $AC > BC$.

◆ ◆ ◆

17.21. На прямой m (рис. 17.13) найдите такую точку C, чтобы сумма расстояний от неё до точек A и B была наименьшей. Ответ обоснуйте.

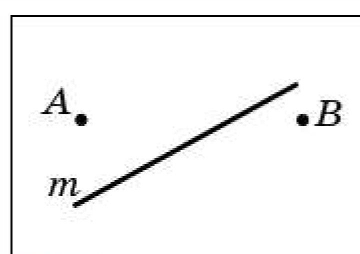


Рис. **17.13**

17.22. Одна сторона треугольника равна 2,8 см, а вторая — 0,6 см. Найдите третью сторону этого треугольника, если её длина, выраженная в сантиметрах, равна целому числу.

17.23. Одна сторона треугольника равна 5,6 см, а вторая — 0,5 см. Найдите третью сторону этого треугольника, если её длина, выраженная в сантиметрах, равна целому числу.

17.24. На рисунке 17.14 указаны длины отрезков, выраженные в сантиметрах. Найдите длину неизвестного отрезка, если x — натуральное число.

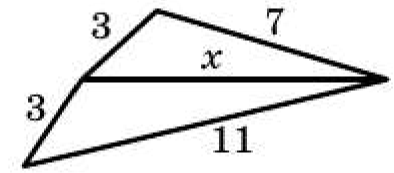


Рис. **17.14**

17.25. Какое наименьшее значение может принимать периметр разностороннего треугольника, длины сторон которого в сантиметрах выражаются натуральными числами?

17.26. В треугольнике ABC проведена биссектриса CK. Известно, что $AC > BC$. Докажите, что угол AKC тупой.

17.27. В треугольнике ABC проведена биссектриса CK. Известно, что угол BKC острый. Докажите, что $AC > BC$.

17.28. На стороне BC равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) отметили точку M. Отрезок AM пересекает высоту BD в точке K. Докажите, что $BM > KM$.

17.29. В треугольнике ABC известно, что $\angle B = 60°$ и $BC > BA$. Докажите, что BC — наибольшая сторона треугольника ABC.

17.30. В треугольнике ABC известно, что $\angle A > \angle B$. Докажите, что $AB < 2BC$.

17.31. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбрали соответственно точки K и E так, что $\angle KEB = 25°$. Известно, что $\angle C = 50°$. Докажите, что $AC + CE > AK$.

17.32. Из вершины A треугольника ABC опустили перпендикуляр AK на биссектрису внешнего угла при вершине B. Докажите, что периметр треугольника AKC больше периметра треугольника ABC.

17.33. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) провели биссектрису AK. Докажите, что $AK < 2CK$.

17.34. Отрезок AM — медиана треугольника ABC. Известно, что $\angle CAM > \angle BAM$. Докажите, что $AB > AC$.

17.35. Докажите, что сумма длин двух сторон треугольника больше удвоенной длины медианы, проведённой к третьей стороне.

17.36. Отрезок AM — медиана треугольника ABC. Известно, что $AB > AC$. Докажите, что $\angle CAM > \angle BAM$.

17.37. На рисунке 17.15 $BC = 1$ см, $AD = 3$ см, $\angle A = \angle B$. Докажите, что $CD > 2$ см.

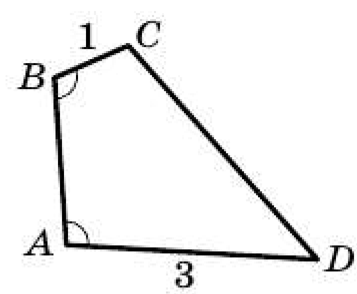


Рис. **17.15**

17.38. В треугольнике ABC угол A в три раза больше угла C. Докажите, что $4AB > BC$.

17.39. На рисунке 17.16 $AC = BC$, $AD > DC$, $\angle ADC = 60°$. Докажите, что $AD + DC > BD$.

17.40. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) $\angle B = 20°$. Докажите, что $AB < 3AC$.

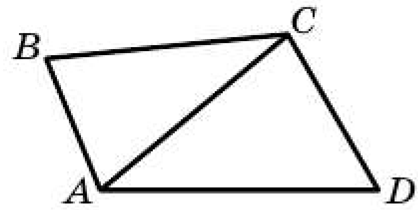


Рис. **17.16**

17.41. На основании AC равнобедренного треугольника ABC отметили точку D, а на его продолжении за точку C — точку E. Известно, что $AD = CE$. Докажите, что $BD + BE > 2BC$.

§ 18 Прямоугольный треугольник

На рисунке 18.1 изображён прямоугольный треугольник ABC, в котором $\angle C = 90°$.

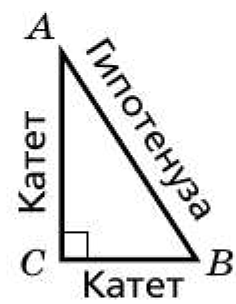


Рис. **18.1**

Сторону прямоугольного треугольника, противолежащую прямому углу, называют **гипотенузой**, а стороны, прилежащие к прямому углу, — **катетами** (см. рис. 18.1).

Для доказательства равенства двух треугольников находят их равные элементы. У любых двух прямоугольных треугольников такие элементы есть всегда — это прямые углы. Поэтому для прямоугольных треугольников можно сформулировать «персональные» признаки равенства.

Теорема 18.1

(признак равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и катету)

Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого, то такие треугольники равны.

Доказательство

Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $\angle C = \angle C_1 = 90°$, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ (рис. 18.2). Надо доказать, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

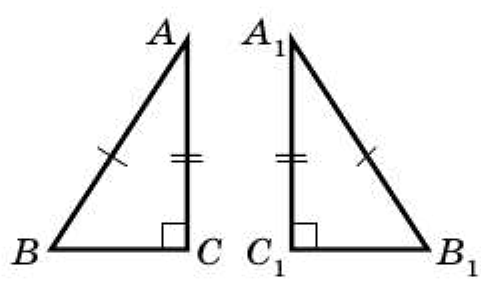


Рис. **18.2**

Расположим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ так, чтобы вершина A совместилась с вершиной A_1, вершина C — с вершиной C_1, а точки B и B_1 лежали в разных полуплоскостях относительно прямой A_1C_1 (рис. 18.3).

Имеем: $\angle A_1C_1B + \angle A_1C_1B_1 = 90° + 90° = 180°$. Значит, угол BC_1B_1 развёрнутый, поэтому точки B, C_1 и B_1 лежат на одной прямой. Получили равнобедренный треугольник BA_1B_1 с боковыми сторонами A_1B и A_1B_1 и высотой A_1C_1 (см. рис. 18.3). Тогда отрезок A_1C_1 — медиана этого треугольника, т. е. $C_1B = C_1B_1$. Следовательно, треугольники A_1BC_1 и $A_1B_1C_1$ равны по третьему признаку равенства треугольников. ■

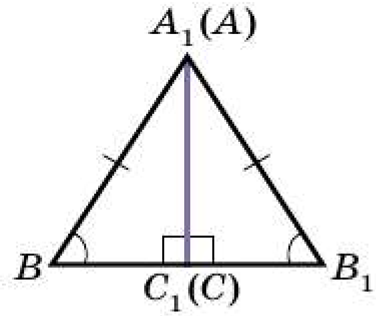


Рис. 18.3

При решении задач удобно пользоваться и другими признаками равенства прямоугольных треугольников, непосредственно следующими из признаков равенства треугольников.

Признак равенства прямоугольных треугольников по двум катетам

Если катеты одного прямоугольного треугольника соответственно равны катетам другого, то такие треугольники равны.

Признак равенства прямоугольных треугольников по катету и прилежащему острому углу

Если катет и прилежащий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему острому углу другого, то такие треугольники равны.

Очевидно, что если острый угол одного прямоугольного треугольника равен острому углу другого прямоугольного треугольника, то равны и два других острых угла. Воспользовавшись этим утверждением, список признаков равенства прямоугольных треугольников можно дополнить ещё двумя.

Признак равенства прямоугольных треугольников по катету и противолежащему острому углу

Если катет и противолежащий ему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и противолежащему ему острому углу другого, то такие треугольники равны.

Признак равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и острому углу

Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого, то такие треугольники равны.

Теорема 18.2

Каждая точка биссектрисы угла равноудалена от его сторон.

Доказательство

Очевидно, что вершина угла обладает доказываемым свойством.

Каждая точка X биссектрисы развёрнутого угла равноудалена от его сторон. Действительно, расстояния от точки X до сторон BA и BC развёрнутого угла ABC равны расстоянию от точки X до прямой AB (рис. 18.4).

Рассмотрим угол ABC, отличный от развёрнутого, и произвольную точку X, которая не совпадает с вершиной этого угла и принадлежит его биссектрисе. Опустим перпендикуляры XM и XN соответственно на стороны BA и BC (рис. 18.5). Надо доказать, что $XM = XN$.

В прямоугольных треугольниках BXM и BXN гипотенуза BX — общая, $\angle MBX = \angle NBX$, так как луч BX — биссектриса угла ABC. Следовательно, треугольники BXM и BXN равны по гипотенузе и острому углу. Отсюда $XM = XN$. ■

Задача. Докажите равенство прямоугольных треугольников по острому углу и биссектрисе, проведённой из вершины этого угла.

Решение. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 18.6) $\angle C = \angle C_1 = 90°$, $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$, отрезки AD и A_1D_1 — биссектрисы, $AD = A_1D_1$.

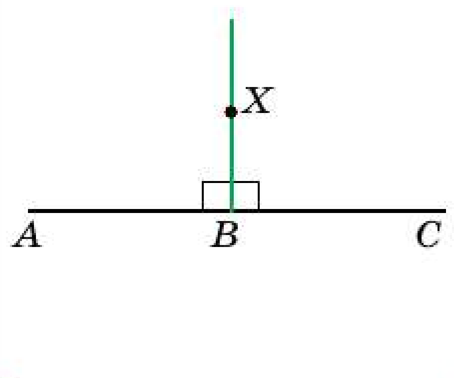


Рис. 18.4

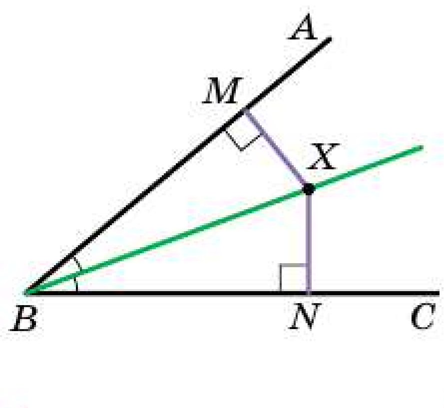


Рис. 18.5

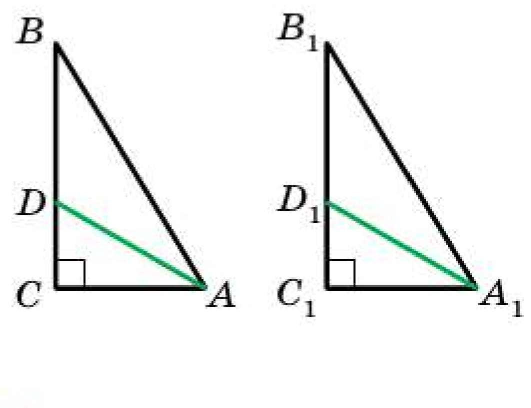


Рис. 18.6

Имеем: $\angle CAD = \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{1}{2}\angle B_1A_1C_1 = \angle C_1A_1D_1$. Поскольку $AD = A_1D_1$, то прямоугольные треугольники ACD и $A_1C_1D_1$ равны по гипотенузе и острому углу. Отсюда $AC = A_1C_1$, и так как $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$, то прямоугольные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по катету и прилежащему острому углу. ■

?

1. Какой треугольник называют прямоугольным?
2. Какую сторону прямоугольного треугольника называют гипотенузой?
3. Какую сторону прямоугольного треугольника называют катетом?
4. Сформулируйте признак равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и катету.
5. Сформулируйте признак равенства прямоугольных треугольников по двум катетам.
6. Сформулируйте признак равенства прямоугольных треугольников по катету и прилежащему острому углу.
7. Сформулируйте признак равенства прямоугольных треугольников по катету и противолежащему острому углу.
8. Сформулируйте признак равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и острому углу.

Практические задания

18.1. С помощью транспортира и линейки постройте прямоугольный треугольник:
1) катеты которого равны 3 см и 4 см;
2) один из катетов которого равен 2,5 см, а прилежащий к нему угол — 40°;
3) гипотенуза которого равна 6 см, а один из острых углов равен 70°.
Обозначьте построенные треугольники, укажите в каждом из них катеты и гипотенузу.

18.2. С помощью транспортира и линейки постройте равнобедренный прямоугольный треугольник:
1) с катетом, равным 5 см;
2) с гипотенузой, равной 4 см.

Упражнения

18.3. На рисунке 18.7 изображён треугольник MKE с прямым углом при вершине K. Укажите:

1) катеты и гипотенузу треугольника;

2) катет, прилежащий к углу E;

3) катет, противолежащий углу M.

18.4. На рисунке 18.8 отрезок AD — высота треугольника ABC. Найдите на этом рисунке прямоугольные треугольники, укажите в каждом из них катеты и гипотенузу.

18.5. Один из острых углов прямоугольного треугольника равен $43°$. Найдите другой острый угол.

18.6. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведена высота AH. Найдите угол CAH, если $\angle B = 76°$.

18.7. Угол между основанием равнобедренного треугольника и высотой, проведённой к боковой стороне, равен $19°$. Найдите углы данного треугольника.

18.8. На рисунке 18.9 $AB \perp BC$, $CD \perp BC$, $AC = BD$. Докажите, что $AB = CD$.

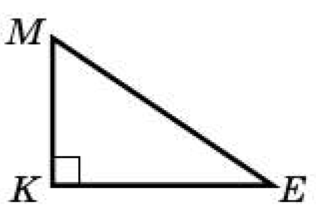


Рис. **18.7**

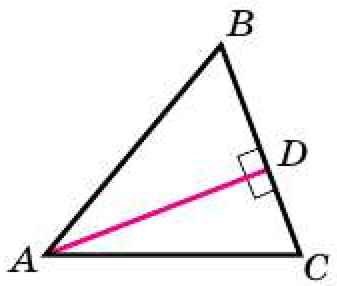


Рис. **18.8**

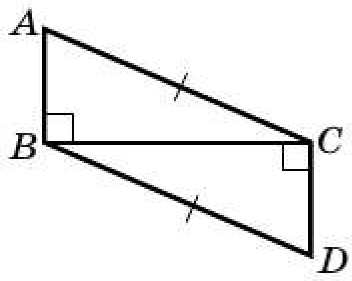


Рис. **18.9**

18.9. На рисунке 18.10 $MO = FO$, $\angle MEO = \angle FKO = 90°$. Докажите, что $\triangle MEO = \triangle FKO$.

18.10. Из точек A и B, лежащих в одной полуплоскости относительно прямой a, опущены перпендикуляры AM и BK на эту прямую, $AM = BK$. Докажите, что $AK = BM$.

18.11. На рисунке 18.11 $AB = CD$, $AB \parallel CD$, $BM \perp AC$, $DK \perp AC$. Докажите, что $BM = DK$.

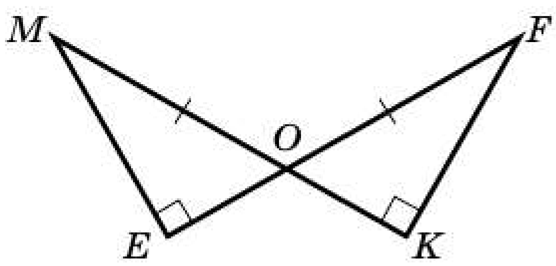


Рис. **18.10**

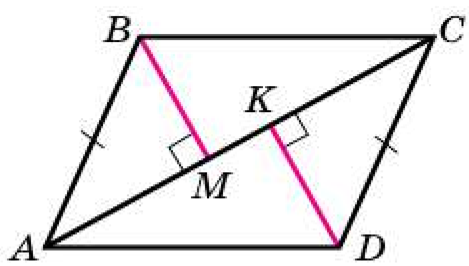


Рис. **18.11**

18.12. На рисунке 18.12 $AB = BC$, $CD \perp AB$, $AE \perp BC$. Докажите, что $BE = BD$.

18.13. На сторонах угла с вершиной в точке B отметили точки A и C так, что $AB = BC$. Через точки A и C провели прямые, перпендикулярные сторонам BA и BC соответственно и пересекаются в точке O. Докажите, что луч BO — биссектриса угла ABC.

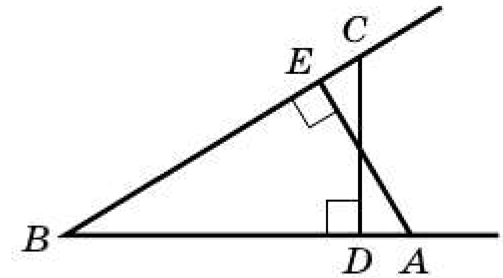


Рис. **18.12**

◆ ◆

18.14. Докажите, что высоты равнобедренного треугольника, проведённые к его боковым сторонам, равны.

18.15. Докажите, что если две высоты треугольника равны, то этот треугольник равнобедренный.

18.16. Докажите равенство прямоугольных треугольников по катету и биссектрисе, проведённой из вершины прямого угла.

18.17. Докажите равенство прямоугольных треугольников по катету и высоте, проведённой из вершины прямого угла.

18.18. Докажите равенство прямоугольных треугольников по катету и биссектрисе, проведённой из вершины прилежащего к этому катету острого угла.

18.19. Докажите равенство прямоугольных треугольников по катету и медиане, проведённой к другому катету.

18.20. Докажите, что в равных треугольниках высóты, опущенные на соответственные стороны, равны.

18.21. Докажите равенство остроугольных треугольников по стороне и двум высотам, проведённым из концов этой стороны.

18.22. Докажите равенство треугольников по стороне и проведённым к ней медиане и высоте.

18.23. Прямая пересекает стороны AB и BC треугольника ABC соответственно в точках M и K, являющихся серединами этих сторон. Докажите, что вершины данного треугольника равноудалены от прямой MK.

18.24. Прямая пересекает стороны AB и BC треугольника ABC в точках M и K соответственно. Вершины данного треугольника равноудалены от прямой MK. Докажите, что точки M и K являются серединами сторон AB и BC соответственно.

◆ ◆ ◆

18.25. Высоты AM и CK треугольника ABC пересекаются в точке H, $HK = HM$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

18.26. Высоты ME и NF треугольника MKN пересекаются в точке O, $OM = ON$, $MF = KE$. Докажите, что треугольник MKN равносторонний.

18.27. Высоты AK и BD остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Известно, что $AH = BC$. Найдите угол BAC.

18.28. Высоты AK и BD остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Известно, что $\angle BAC = 45°$. Докажите, что $AH = BC$.

18.29. Отрезки AM и BN — биссектрисы острых углов прямоугольного треугольника ABC. Из точек M и N на гипотенузу AB опустили перпендикуляры MP и NQ. Найдите угол QCP.

18.30. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) на стороне BC отмечена точка M так, что отрезок MC равен высоте треугольника, проведённой к боковой стороне. На стороне AB отмечена точка K так, что $KM \perp BC$. Найдите угол ACK.

18.31. Можно ли утверждать, что если две стороны и высота, проведённая к третьей стороне, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и высоте, проведённой к третьей стороне другого треугольника, то эти треугольники равны?

18.32. Докажите равенство треугольников по двум углам и высоте, проведённой из вершины третьего угла.

18.33. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отметили точки D и E так, что $BC = BD$ и $AC = AE$. Из точек D и E опустили перпендикуляры DM и EF соответственно на катеты AC и BC. Докажите, что $DE = EF + DM$.

18.34. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC построили равнобедренные прямоугольные треугольники ACE и BCF такие, что $\angle EAC = \angle FBC = 90°$. Из точек E и F на прямую AB опустили перпендикуляры EM и FN. Докажите, что $AB = EM + FN$.

18.35. Равнобедренные прямоугольные треугольники ABC и MNK ($\angle C = \angle N = 90°$) расположены так, что вершины M, N и K принадлежат соответственно сторонам AB, BC и CA. Докажите, что $AK = 2CN$.

18.36. Докажите равенство прямоугольных треугольников по острому углу и сумме гипотенузы и катета, прилежащего к этому углу.

18.37. Докажите равенство прямоугольных треугольников по острому углу и сумме катетов.

Задача 1. Докажите, что катет, лежащий против угла, величина которого равна 30°, равен половине гипотенузы.

Решение. Рассмотрим треугольник ABC, в котором $\angle ACB = 90°$, $\angle BAC = 30°$. Надо доказать, что $BC = \frac{1}{2}AB$.

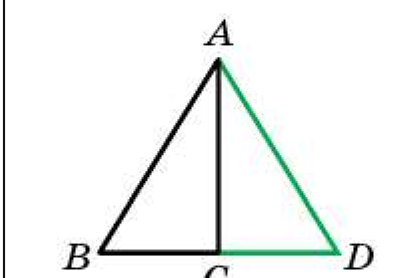


Рис. 19.1

На луче BC отложим отрезок CD, равный отрезку BC (рис. 19.1). Проведём отрезок AD. Тогда в треугольниках ABC и ADC имеем: $\angle ACB = \angle ACD = 90°$, стороны BC и CD равны по построению, отрезок AC — общая сторона этих треугольников. Следовательно, эти треугольники равны по двум катетам. Тогда $\angle DAC = 30°$, отсюда $\angle BAD = 2\angle DAC = 60°$. Имеем: $\angle ABD = 90° - 30° = 60°$. Тогда $\angle ADB = 60°$ и треугольник ABD — равносторонний. Значит, $BC = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}AB$. ■

Задача 2. Докажите, что если катет равен половине гипотенузы, то угол, лежащий против этого катета, равен 30°.

Решение. Рассмотрим треугольник ABC, в котором $\angle ACB = 90°$, $BC = \frac{1}{2}AB$. Надо доказать, что $\angle BAC = 30°$.

На луче BC отложим отрезок CD, равный отрезку BC (рис. 19.1). Тогда $AB = BD$. Кроме того, отрезок AC является медианой и высотой треугольника BAD, следовательно, по признаку равнобедренного треугольника $AB = AD$. Получаем: $AB = BD = AD$, поэтому треугольник BAD равносторонний, следовательно, $\angle BAD = 60°$.

Поскольку отрезок AC — биссектриса треугольника BAD, то $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BAD = 30°$. ■

Задача 3. Докажите, что медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, равна её половине.

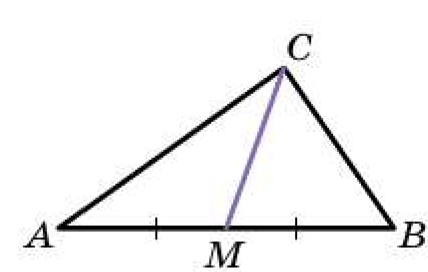


Рис. 19.2

Решение. На рисунке 19.2 изображён прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$), в котором проведена медиана CM. Докажем, что $CM = \frac{1}{2}AB$.

На продолжении отрезка CM за точку M отметим точку D так, что $CM = MD$. Проведём отрезок AD (рис. 19.3). Имеем: $AM = MB$ по условию, $CM = MD$ по построению, углы AMD и CMB равны как вертикальные. Следовательно, треугольники AMD и CMB равны по первому признаку равенства треугольников. Отсюда $AD = CB$ и $\angle ADM = \angle BCM$.

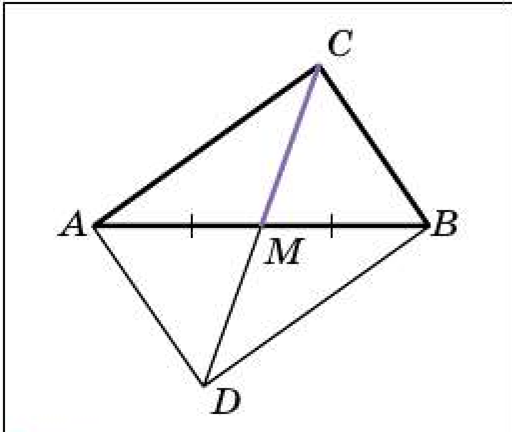


Рис. **19.3**

Имеем: $\angle ACM + \angle BCM = 90°$. Но $\angle ADM = \angle BCM$. Тогда $\angle ACM + \angle ADM = 90°$. Отсюда получаем, что $\angle DAC = 90°$. Следовательно, треугольники DAC и BCA равны по двум катетам ($AD = CB$ и катет AC — общий). Отсюда $CD = AB$. Следовательно, $CM = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}AB$. ■

Задача 4. Медиана CM треугольника ABC равна половине стороны AB. Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

Решение. На рисунке 19.4 изображён треугольник ABC, в котором медиана CM равна половине стороны AB. Докажем, что $\angle C = 90°$.

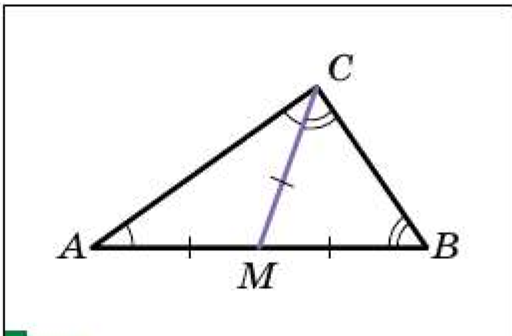


Рис. **19.4**

По условию $AM = CM$. Тогда в треугольнике AMC углы A и ACM равны.

По условию $BM = CM$, тогда в треугольнике BMC углы B и BCM равны.

В треугольнике ACB имеем: $\angle A + \angle B + \angle ACB = 180°$. Учитывая, что $\angle A = \angle ACM$ и $\angle B = \angle BCM$, получаем: $\angle ACM + \angle BCM + \angle ACB = 180°$. Так как $\angle ACM + \angle BCM = \angle ACB$, то $2\angle ACB = 180°$. Тогда $\angle ACB = 90°$.

Следовательно, треугольник ABC прямоугольный. ■

1. Каким свойством обладает катет, лежащий против угла, равного 30°?
2. Какова градусная мера угла, лежащего против катета, равного половине гипотенузы?
3. Каким свойством обладает медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе?
4. В каком треугольнике медиана равна половине стороны, к которой она проведена?

Упражнения

19.1. Докажите, что в прямоугольном треугольнике катет меньше гипотенузы.

19.2. Стороны прямоугольного треугольника равны 24 см, 10 см и 26 см. Чему равен наибольший катет данного треугольника?

19.3. В прямоугольном треугольнике DEF гипотенуза DE равна 18 см, $\angle D = 30^\circ$. Найдите катет FE.

19.4. В прямоугольном треугольнике MKC известно, что $\angle M = 90^\circ$, $\angle C = 60^\circ$, $CM = 7$ см. Найдите гипотенузу CK.

19.5. В равностороннем треугольнике ABC точка D — середина стороны AB. Из этой точки опущен перпендикуляр DE на сторону AC. Найдите отрезки, на которые точка E разбивает отрезок AC, если сторона данного треугольника равна 16 см.

19.6. Один из углов прямоугольного треугольника равен 30°, а разность гипотенузы и меньшего катета — 5 см. Найдите эти стороны треугольника.

19.7. В треугольнике ABC известно, что $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 45^\circ$, отрезок CK — высота, $AC = 10$ см. Найдите отрезок BK.

19.8. В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, отрезок CD — высота, $BD = 7$ см. Найдите гипотенузу AB.

19.9. В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 90^\circ$, отрезок CK — высота, $CK = 7$ см, $AC = 14$ см. Найдите угол B.

19.10. В остроугольном треугольнике ABC проведены медиана BM и высота CH. Найдите сторону AC, если $MH = 10$ см.

19.11. На рисунке 19.5 отрезок AB — перпендикуляр, отрезок AC — наклонная, $AC = 2$ см. Найдите угол ACB и длину перпендикуляра AB, если эта длина, выраженная в сантиметрах, равна целому числу.

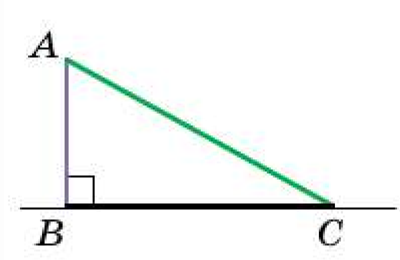


Рис. 19.5

19.12. Основание равнобедренного треугольника равно 18 см, а один из углов — 120°. Найдите высоту треугольника, проведённую из вершины угла при его основании.

19.13. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC провели высоту BM длиной 7,5 см, $\angle MBC = 15^\circ$. Найдите боковую сторону треугольника.

19.14. Существует ли равнобедренный треугольник, у которого каждая высота вдвое меньше одной из его сторон?

19.15. Существует ли прямоугольный треугольник, который можно разрезать на три равных треугольника?

19.16. Один из углов треугольника на $120°$ больше другого. Докажите, что биссектриса треугольника, проведённая из вершины третьего угла, в два раза больше высоты, проведённой из той же вершины.

19.17. Биссектрисы AM и BK равностороннего треугольника ABC пересекаются в точке O. Докажите, что $AO : OM = 2 : 1$.

19.18. В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 90°$, $\angle B = 30°$. Серединный перпендикуляр отрезка AB пересекает его в точке M, а отрезок BC — в точке K. Докажите, что $MK = \frac{1}{3}BC$.

19.19. Серединный перпендикуляр гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC пересекает катет AC в точке M. Известно, что $AM = 2MC$. Найдите острые углы треугольника ABC.

19.20. В треугольнике MKE известно, что $\angle K = 90°$, $\angle E = 30°$, $KE = 12$ см. Найдите биссектрису MC треугольника.

19.21. В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 90°$, $\angle BAC = 60°$, отрезок AD — биссектриса треугольника ABC, отрезок CD на 3 см меньше отрезка BD. Найдите биссектрису AD.

19.22. Докажите, что любой треугольник можно разрезать на несколько равнобедренных треугольников.

19.23. В остроугольном треугольнике ABC проведены высота AA_1, биссектриса BB_1 и медиана CC_1. Треугольник $A_1B_1C_1$ равносторонний. Докажите, что треугольник ABC также равносторонний.

19.24. На стороне BC треугольника ABC отметили точку K так, что $\angle BAK = 20°$. На отрезке AK отметили точку M так, что $\angle ABM = 90°$. Оказалось, что $AM = 2BK$. Найдите угол ABC.

19.25. В треугольнике ABC известно, что $AB = 2$ см, $\angle A = 60°$, $\angle B = 70°$. На стороне AC отметили точку D так, что $AD = 1$ см. Найдите углы треугольника BDC.

19.26. В равнобедренном треугольнике с основанием AC проведена биссектриса угла C, которая пересекает боковую сторону AB в точке D. Точка E лежит на основании AC так, что $DE \perp DC$. Найдите отрезок AD, если $CE = 2$ см.

19.27. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса CD угла C. На прямой AC отмечена точка E так, что $\angle EDC = 90°$. Найдите отрезок EC, если $AD = 1$ см.

19.28. Высоты AE и BF остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Точки M и N — середины отрезков AB и CH соответственно. Докажите, что $MN \perp FE$.

19.29. В треугольниках ABC и ABD известно, что $\angle ACB = \angle ADB = 90°$ и $\angle ABC = \angle BAD = 30°$. Найдите отрезок CD, если $AB = 6$ см.

19.30. В прямоугольном треугольнике один из углов равен $15°$. Докажите, что высота, проведённая к гипотенузе, в четыре раза меньше гипотенузы.

19.31. В прямоугольном треугольнике высота, проведённая к гипотенузе, в четыре раза меньше гипотенузы. Докажите, что один из острых углов данного прямоугольного треугольника равен $15°$.

19.32. В треугольнике ABC известно, что $\angle A = 15°$ и $\angle B = 30°$. На стороне AB отметили такую точку E, что $\angle ACE = 90°$. Найдите отрезок AE, если $BC = 2$ см.

19.33. На рисунке 19.6 $\angle ABC = \angle ADC = 90°$ и $\angle BCD = 30°$. Известно, что $BD = 5$ см. Найдите отрезок AC.

19.34. На рисунке 19.7 $\angle A + \angle D = 90°$, $AD = 10$ см, $BC = 4$ см. Точки M и N — середины отрезков BC и AD соответственно. Докажите, что $MN \geqslant 3$ см.

19.35. В треугольнике ABC сторона AC наибольшая. На продолжении стороны AC за точку C отметили точку D так, что $CD = CB$. Докажите, что угол ABD не является острым.

19.36. На рисунке 19.8 $\angle A = 90°$. Докажите, что периметр треугольника BCD больше, чем $2AC$.

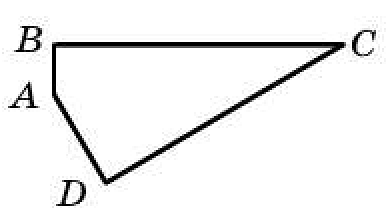


Рис. 19.6

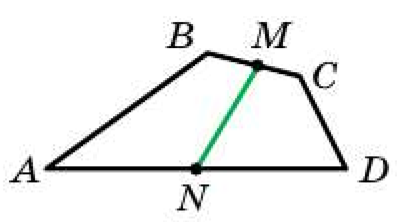


Рис. 19.7

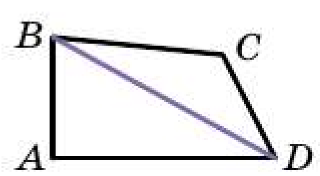


Рис. 19.8

Итоги главы 3

Параллельные прямые

Две прямые называют параллельными, если они не пересекаются.

Основное свойство параллельных прямых (аксиома параллельности прямых)

Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.

Признаки параллельности двух прямых

- Две прямые, перпендикулярные третьей прямой, параллельны.
- Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.
- Если накрест лежащие углы, образующиеся при пересечении двух прямых секущей, равны, то прямые параллельны.
- Если сумма односторонних углов, образующихся при пересечении двух прямых секущей, равна 180°, то прямые параллельны.
- Если соответственные углы, образующиеся при пересечении двух прямых секущей, равны, то прямые параллельны.

Свойства параллельных прямых

Если две параллельные прямые пересечены секущей, то:

- углы, образующие пару накрест лежащих углов, равны;
- углы, образующие пару соответственных углов, равны;
- сумма углов, образующих пару односторонних углов, равна 180°.

Расстояние между параллельными прямыми

Расстоянием между двумя параллельными прямыми называют расстояние от любой точки одной из прямых до другой прямой.

Сумма углов треугольника

Сумма углов треугольника равна 180°.

Внешний угол треугольника

Внешним углом треугольника называют угол, смежный с углом этого треугольника.

Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним.

Внешний угол треугольника больше каждого из углов треугольника, не смежных с ним.

Неравенство треугольника

Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон.

Следствия из неравенства треугольника

1) Если длина одного из трёх данных отрезков не меньше суммы длин двух других, то эти отрезки не могут служить сторонами треугольника;

2) каждая сторона треугольника больше разности двух других его сторон;

3) если для трёх точек A, B и C выполняется равенство $AB = AC + CB$, то точка C является внутренней точкой отрезка AB;

4) для любых трёх точек A, B и C выполняются неравенства:

$$AB \leqslant AC + CB;$$
$$AC \leqslant AB + BC;$$
$$BC \leqslant BA + AC.$$

Сравнение сторон и углов треугольника

В треугольнике против большей стороны лежит больший угол, и наоборот, против большего угла лежит бóльшая сторона.

Гипотенуза и катет

Сторону прямоугольного треугольника, противолежащую прямому углу, называют гипотенузой, а стороны, прилежащие к прямому углу, — катетами.

Признаки равенства прямоугольных треугольников

- *По гипотенузе и катету*: если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого, то такие треугольники равны.
- *По двум катетам*: если катеты одного прямоугольного треугольника соответственно равны катетам другого, то такие треугольники равны.
- *По катету и прилежащему острому углу*: если катет и прилежащий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему острому углу другого, то такие треугольники равны.

- *По катету и противолежащему острому углу*: если катет и противолежащий ему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и противолежащему ему острому углу другого, то такие треугольники равны.
- *По гипотенузе и острому углу*: если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого, то такие треугольники равны.

Свойства прямоугольного треугольника

- Гипотенуза больше катета.
- Катет, лежащий против угла, величина которого равна 30°, равен половине гипотенузы.
- Если катет равен половине гипотенузы, то угол, лежащий против этого катета, равен 30°.
- Медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, равна её половине.

глава 4

Окружность и круг. Геометрические построения

- В этой главе вы познакомитесь со свойствами окружности. Узнаете, как, отказавшись от привычных инструментов — угольника и транспортира, используя лишь циркуль и линейку без делений, выполнить многие построения.

§ 20 Геометрическое место точек. Окружность и круг

Любое множество точек — это геометрическая фигура. Изобразить произвольную фигуру легко: всё, что нарисуете, — это геометрическая фигура (рис. 20.1). Однако изучать фигуры, состоящие из хаотически расположенных точек, вряд ли целесообразно. Поэтому есть смысл выделить тот класс фигур, все точки которых обладают каким-то характерным свойством. Каждую из таких фигур называют **геометрическим местом точек.**

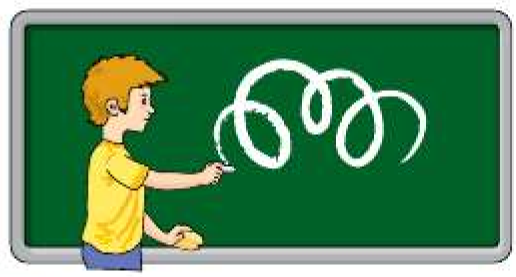


Рис. **20.1**

Определение

Геометрическим местом точек (ГМТ) называют множество всех точек, обладающих определённым свойством.

Образно ГМТ можно представить так: задают некоторое свойство, а потом на белой плоскости *все точки*, обладающие этим свойством, красят в зелёный цвет. Полученная при этом «зелёная фигура» и будет ГМТ.

Например, отметим две точки A и B. Для всех точек зададим свойство: одновременно принадлежать лучам AB и BA. Ясно, что указанным свойством обладают все точки отрезка AB и только они (рис. 20.2). Поэтому отрезок AB является ГМТ, обладающих указанным свойством.

Рис. **20.2**

Рассмотрим перпендикулярные прямые a и b. Для всех точек зададим свойство: принадлежать прямой b и находиться на расстоянии 1 см от прямой a. Очевидно, что точки A и B (рис. 20.3) удовлетворяют этим условиям. Также понятно, что никакая другая точка, отличная от A и B, этим свойством не обладает. Следовательно, искомое ГМТ — это фигура, состоящая из двух точек A и B.

Чтобы какое-то множество точек можно было называть геометрическим местом точек, обладающих некоторым свойством, надо доказать две взаимно обратные теоремы:

1) **прямая теорема:** *каждая точка данного множества обладает заданным свойством*;

2) **обратная теорема:** *если точка обладает заданным свойством, то она принадлежит данному множеству*.

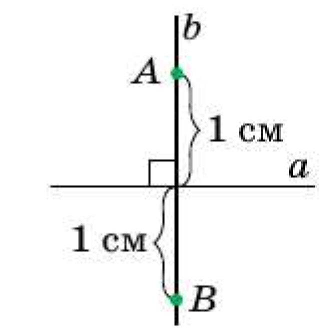


Рис. **20.3**

Теорема 20.1

Серединный перпендикуляр отрезка является геометрическим местом точек, равноудалённых от концов этого отрезка.

Прямая теорема

Каждая точка серединного перпендикуляра отрезка равноудалена от его концов.

Доказательство

По теореме 8.2 каждая точка серединного перпендикуляра обладает заданным свойством.

Обратная теорема

Если точка равноудалена от концов отрезка, то она принадлежит серединному перпендикуляру этого отрезка.

Доказательство

По теореме 11.2, если точка обладает заданным свойством, то она принадлежит серединному перпендикуляру. ■

Теорема 20.2

Биссектриса угла является геометрическим местом точек, принадлежащих углу и равноудалённых от его сторон.

Прямая теорема

Каждая точка биссектрисы угла равноудалена от его сторон.

Эта теорема была доказана в § 18 (теорема 18.2).

Обратная теорема

Если точка, принадлежащая углу, равноудалена от его сторон, то она лежит на биссектрисе этого угла.

Доказательство

Очевидно, что вершина угла обладает доказываемым свойством.

Рассмотрим произвольную точку X, принадлежащую углу ABC, которая не совпадает с его вершиной и равноудалена от его сторон. Опустим перпендикуляры XM и XN соответственно на прямые BA и BC.

Если одна из точек M или N принадлежит продолжению стороны угла, например точка N (рис. 20.4), то расстояние от точки X до стороны BA угла ABC равно длине отрезка XM, а расстояние от точки X до стороны BC — длине отрезка XB. Но в прямоугольном треугольнике XMB выполняется неравенство $XB > XM$, что противоречит условию равноудалённости точки X от сторон угла. Следовательно, если точка, принадлежащая углу, равноудалена от его сторон, то основания перпендикуляров, опущенных из этой точки на прямые, содержащие стороны угла, принадлежат его сторонам (рис. 20.5).

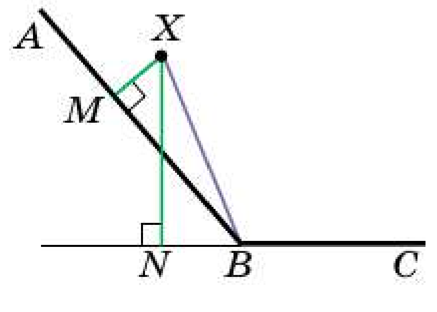


Рис. 20.4

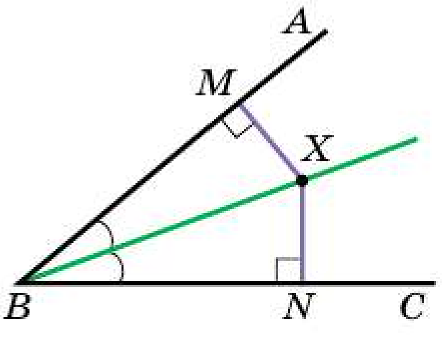


Рис. 20.5

Если данный угол ABC является развёрнутым, то точка X этого угла, равноудалённая от его сторон, принадлежит лучу, проходящему через вершину угла и перпендикулярному его сторонам, т. е. принадлежит биссектрисе развёрнутого угла (рис. 20.6).

Рассмотрим произвольную точку X, принадлежащую неразвёрнутому углу ABC, не совпадающую с его вершиной и равноудалённую от его сторон (см. рис. 20.5).

В прямоугольных треугольниках BXM и BXN гипотенуза BX общая, отрезки XM и XN равны по условию. Следовательно, треугольники BXM и BXN равны по гипотенузе и катету. Отсюда $\angle MBX = \angle NBX$, т. е. точка X принадлежит биссектрисе угла ABC. ■

Задача. Найдите геометрическое место точек, равноудалённых от сторон данного неразвёрнутого угла.

Решение. Рассмотрим данный угол ABC. Будем искать ГМТ как среди точек угла ABC, так и вне его. Из теоремы 20.2 следует, что биссектриса этого угла принадлежит искомому ГМТ.

Теперь найдём геометрическое место точек, равноудалённых от сторон угла ABC и не принадлежащих этому углу. Проведём через точку B прямые MN и EF перпендикулярно лучам BA и BC соответственно (рис. 20.7).

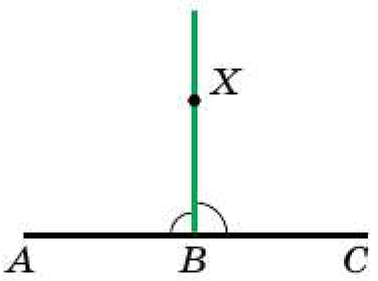


Рис. 20.6

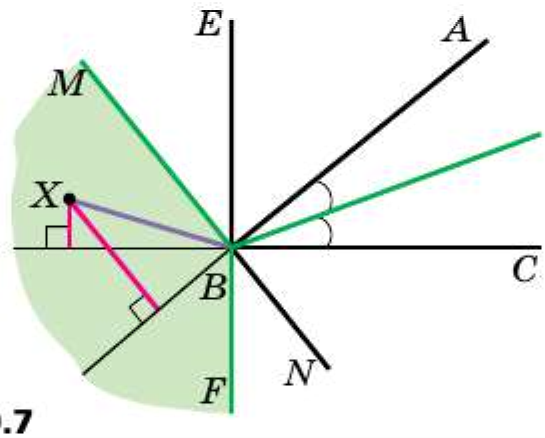


Рис. 20.7

Если точка X принадлежит углу MBF, то основания перпендикуляров, опущенных из этой точки на прямые BA и BC, не принадлежат сторонам угла (см. рис. 20.7). Следовательно, расстояния от точки X до лучей BA и BC равны длине отрезка XB, т. е. точка X равноудалена от сторон угла ABC. Значит, все точки угла MBF принадлежат искомому ГМТ.

Понятно, что никакая точка ни угла MBA, ни угла FBC, не принадлежащая сторонам этих углов, не может быть равноудалена от лучей BA и BC.

Итак, искомым ГМТ является объединение угла MBF и биссектрисы угла ABC. ■

Заметим, что геометрическим местом точек, равноудалённых от сторон развёрнутого угла, является прямая, проходящая через вершину угла перпендикулярно его сторонам (рис. 20.8).

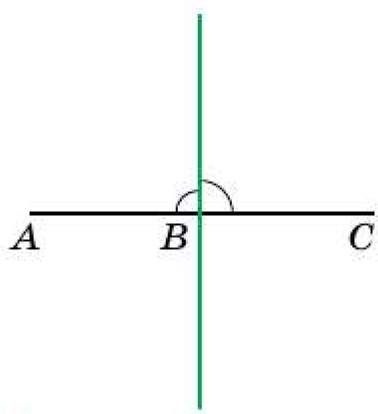


Рис. 20.8

Определение

Окружностью называют геометрическое место точек, расстояния от которых до заданной точки равны данному положительному числу.

Заданную точку называют **центром** окружности. На рисунке 20.9 точка O — центр окружности.

Любой отрезок, соединяющий точку окружности с её центром, называют **радиусом** окружности. Длину этого отрезка также принято называть радиусом. На рисунке 20.9 отрезок OX — радиус. Из определения следует, что все радиусы одной окружности равны.

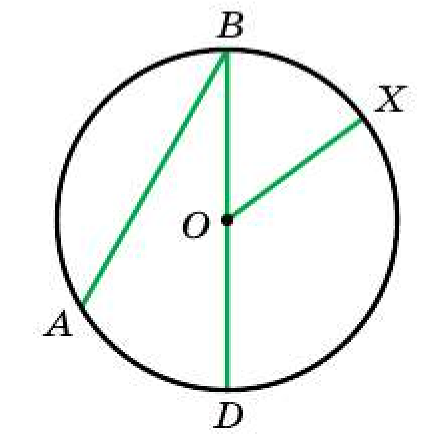


Рис. 20.9

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называют **хордой** окружности. На рисунке 20.9 отрезки AB и BD — хорды. Хорду, проходящую через центр окружности, называют **диаметром**. На рисунке 20.9 отрезок BD — диаметр окружности. Очевидно, что $BD = 2OX$, т. е. диаметр окружности в два раза больше её радиуса.

Из курса математики 6 класса вы знаете, что фигуру, ограниченную окружностью, называют кругом (рис. 20.10). Теперь определение круга можно сформулировать с помощью понятия ГМТ.

Определение

Кру́гом называют геометрическое место точек, расстояния от которых до заданной точки не больше данного положительного числа.

Заданную точку называют **центром** круга. Радиус окружности, которая ограничивает круг, называют **радиусом** круга.

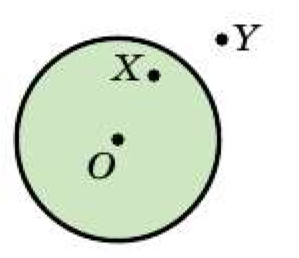


Рис. 20.10

Если X — произвольная точка круга с центром O и радиусом R, то $OX \leqslant R$ (рис. 20.10). Если $OX < R$, то говорят, что точка X лежит внутри окружности, ограничивающей данный круг. Точка Y кругу не принадлежит (рис. 20.10). В этом случае говорят, что точка Y лежит вне окружности, ограничивающей круг.

Из определения круга следует, что окружность, ограничивающая круг, ему принадлежит.

Хорда и **диаметр** круга — это хорда и диаметр окружности, ограничивающей круг.

Определение

Точку называют внутренней точкой фигуры, если существует круг с центром в этой точке, все точки которого принадлежат данной фигуре.

Например, на рисунке 20.11 точка X является внутренней точкой треугольника ABC.

Из определения следует, что внутренняя точка фигуры принадлежит этой фигуре.

Любая точка стороны треугольника принадлежит ему, но не является внутренней точкой треугольника (подумайте почему).

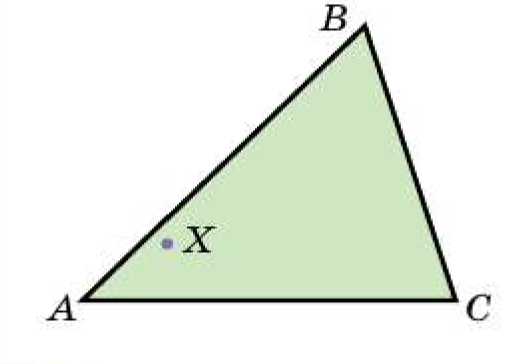


Рис. 20.11

Определение

Точку фигуры называют граничной точкой фигуры, если любой круг с центром в этой точке содержит как точки, принадлежащие этой фигуре, так и точки, не принадлежащие ей.

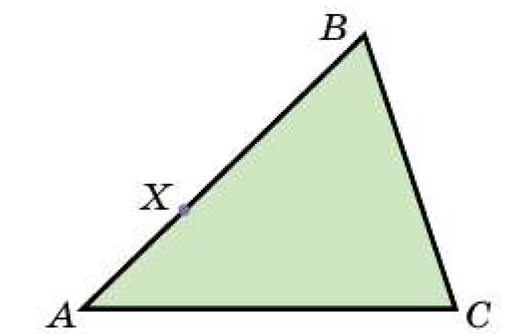


Рис. 20.12

Например, любая точка стороны треугольника является его граничной точкой (рис. 20.12).

Множество всех граничных точек фигуры образуют **границу фигуры**.

Так, границей круга является окружность, ограничивающая этот круг.

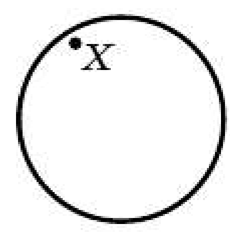


Рис. 20.13

На рисунке 20.13 изображена точка X, лежащая внутри окружности. Однако эта точка не является внутренней точкой окружности. Вообще, окружность не имеет внутренних точек. Любая её точка является граничной.

Рассмотрим фигуру, состоящую из всех точек круга, за исключением точек ограничивающей его окружности. Эта фигура примечательна тем, что все её точки являются внутренними.

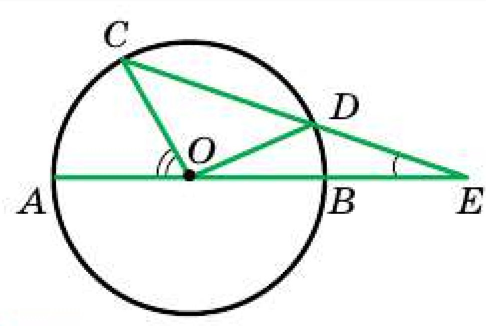


Рис. 20.14

Задача. На продолжении хорды CD окружности с центром O за точку D отметили точку E такую, что отрезок DE равен радиусу окружности. Прямая OE пересекает данную окружность в точках A и B (рис. 20.14). Докажите, что $\angle AOC = 3\angle CEO$.

Решение. Пусть $\angle CEO = \alpha$.

Поскольку треугольник ODE равнобедренный, то $\angle DOE = \angle CEO = \alpha$.

Угол ODC — внешний угол треугольника ODE. Тогда $\angle ODC = \angle DOE + \angle CEO = 2\alpha$.

Поскольку треугольник COD равнобедренный, то $\angle OCD = \angle ODC = 2\alpha$.

Угол AOC — внешний угол треугольника COE. Тогда $\angle AOC = \angle OCD + \angle CEO = 2\alpha + \alpha = 3\alpha$, т. е. $\angle AOC = 3\angle CEO$. ■

?

1. Какое множество точек называют геометрическим местом точек?
2. Какие две теоремы надо доказать, чтобы некоторое множество точек можно было назвать ГМТ, обладающих некоторым свойством?
3. Какая фигура является геометрическим местом точек, равноудалённых от концов отрезка?
4. Какая фигура является геометрическим местом точек, принадлежащих углу и равноудалённых от его сторон?
5. Что называют окружностью? Радиусом окружности? Хордой окружности? Диаметром окружности?
6. Что называют кругом?
7. Какую точку называют внутренней точкой фигуры?
8. Какую точку называют граничной точкой фигуры?

Практические задания

20.1. Начертите окружность с центром O и радиусом 3,5 см. Отметьте на этом рисунке какие-нибудь:
1) точки A и B такие, что $OA < 3{,}5$ см, $OB < 3{,}5$ см;
2) точки C и D такие, что $OC = 3{,}5$ см, $OD = 3{,}5$ см;
3) точки E и F такие, что $OE > 3{,}5$ см, $OF > 3{,}5$ см.

20.2. Начертите отрезок AB, длина которого равна 3 см. Найдите точку, удалённую от каждого из концов отрезка AB на 2 см. Сколько существует таких точек?

20.3. Начертите отрезок CD, длина которого равна 4 см. Найдите точку, удалённую от точки C на 2,5 см, а от точки D — на 3,5 см. Сколько существует таких точек?

20.4. Начертите окружность, диаметр которой равен 7 см. Отметьте на окружности точку A. Найдите на окружности точки, удалённые от точки A на 4 см.

Упражнения

20.5. На рисунке 20.15 изображена окружность с центром B. Укажите радиус, хорду и диаметр окружности. Сколько изображено на рисунке радиусов? Хорд?

20.6. Хорды AB и CD окружности с центром O равны. Докажите, что $\angle AOB = \angle COD$.

20.7. На рисунке 20.16 точка O — центр окружности, $\angle COD = \angle MOK$. Докажите, что хорды CD и MK равны.

20.8. Отрезки AB и CD — диаметры окружности. Докажите, что $\angle BAC = \angle CDB$.

20.9. Отрезки MK и EF — диаметры окружности с центром O, $MK = 12$ см, $ME = 10$ см. Найдите периметр треугольника FOK.

20.10. Отрезки AC и AB — соответственно диаметр и хорда окружности с центром O, $\angle BAC = 26°$ (рис. 20.17). Найдите угол BOC.

20.11. Отрезки MP и MK — соответственно хорда и диаметр окружности с центром O, $\angle POK = 84°$ (рис. 20.18). Найдите угол MPO.

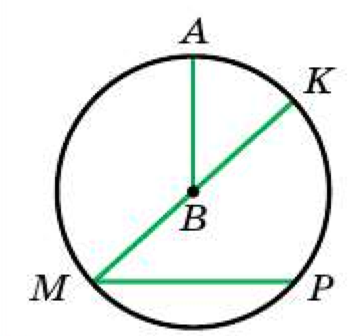


Рис. 20.15

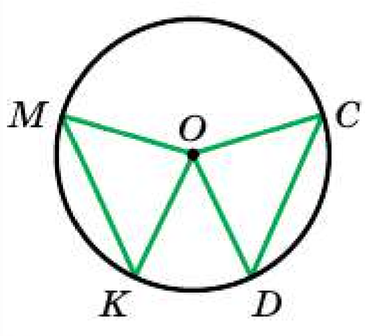


Рис. 20.16

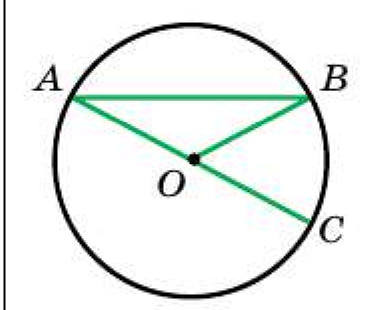


Рис. 20.17

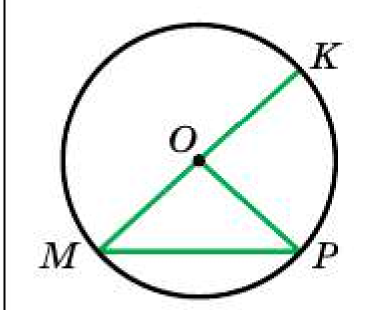


Рис. 20.18

20.12. Отрезки AB и AC — соответственно диаметр и хорда окружности, хорда AC равна радиусу этой окружности. Найдите угол BAC.

20.13. Отрезок CD — диаметр окружности с центром O. На окружности отметили точку E так, что $\angle COE = 90°$. Докажите, что $CE = DE$.

20.14. Чему равен диаметр окружности, если известно, что он на 4 см больше радиуса данной окружности?

20.15. Отрезки AB и CD — диаметры окружности. Докажите, что $AC \parallel BD$.

20.16. Хорда пересекает диаметр окружности под углом 30° и делит его на отрезки длиной 4 см и 10 см. Найдите расстояние от центра окружности до этой хорды.

20.17. Хорда CD пересекает диаметр AB в точке M, $CE \perp AB$, $DF \perp AB$, $\angle AMC = 60°$, $ME = 18$ см, $MF = 12$ см (рис. 20.19). Найдите хорду CD.

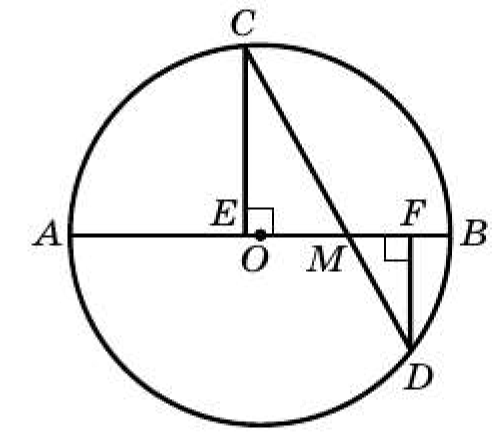


Рис. **20.19**

20.18. Найдите геометрическое место центров окружностей данного радиуса, проходящих через данную точку.

20.19. Найдите геометрическое место центров окружностей, проходящих через две данные точки.

20.20. Найдите геометрическое место точек, равноудалённых от двух данных пересекающихся прямых.

20.21. Найдите геометрическое место вершин равнобедренных треугольников, имеющих общее основание.

20.22. Найдите геометрическое место точек, равноудалённых от двух параллельных прямых.

20.23. Найдите геометрическое место точек, удалённых от данной прямой на заданное расстояние.

20.24. Даны точки A и B. Найдите геометрическое место точек X таких, что точки A, B и X являются вершинами равнобедренного прямоугольного треугольника.

20.25. Даны точки A и B. Найдите геометрическое место точек X таких, что точки A, B и X являются вершинами равностороннего треугольника.

20.26. Отрезок AB — диаметр окружности, M — произвольная точка окружности, отличная от точек A и B. Докажите, что $\angle AMB = 90°$.

20.27. Даны точки A и B. Найдите геометрическое место точек X таких, что $AX > BX$.

20.28. Даны точки A и B. Найдите геометрическое место точек X таких, что $AX > AB$.

20.29. Найдите геометрическое место точек, удалённых от данного отрезка на заданное расстояние.

20.30. Найдите геометрическое место точек, удалённых от данного луча на заданное расстояние.

20.31. Дан треугольник ABC. Найдите геометрическое место точек X таких, что прямая CX пересекает отрезок AB.

20.32. Дан треугольник ABC. Найдите геометрическое место точек X таких, что: 1) луч CX пересекает отрезок AB; 2) отрезок CX пересекает отрезок AB.

20.33. Дан прямой угол COD. Рассматриваются все прямоугольные треугольники AOB с гипотенузой AB, равной d, вершины A и B которых принадлежат лучам OC и OD соответственно. Найдите ГМТ середин гипотенуз этих треугольников.

20.34. Даны точки A и B. Найдите геометрическое место точек X таких, что точки A, B и X являются вершинами равнобедренного треугольника.

20.35. Дана окружность радиуса 1 см. Найдите геометрическое место точек, удалённых от данной окружности на 1 см.

20.36. Даны точки A, B и C, не лежащие на одной прямой. Найдите геометрическое место точек X таких, что ближайшей к точке X среди точек A, B и C является точка A.

20.37. Дан угол ABC, равный $60°$. Найдите ГМТ, удалённых от сторон данного угла на расстояние, равное 3 см.

20.38. Дан квадрат $ABCD$. Найдите геометрическое место точек X таких, что сумма высот треугольников AXB и CXD, проведённых соответственно к сторонам AB и CD, равна сумме высот треугольников BXC и AXD, проведённых соответственно к сторонам BC и AD.

§ 21 Свойства окружности. Касательная к окружности

Теорема 21.1

Диаметр окружности, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам.

Доказательство

Если хорда является диаметром, то заключение теоремы очевидно.

На рисунке 21.1 изображена окружность с центром O, M — точка пересечения диаметра CD и хорды AB, отличной от диаметра окружности, $CD \perp AB$. Докажем, что $AM = MB$.

Проведём радиусы OA и OB. В равнобедренном треугольнике AOB ($OA = OB$) отрезок OM — высота, а значит, и медиана, т. е. $AM = MB$. ■

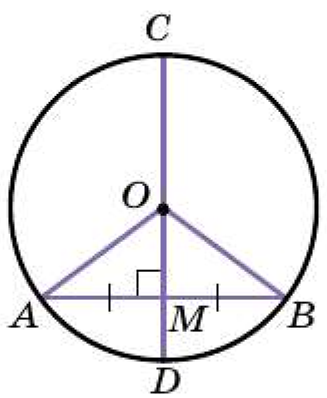


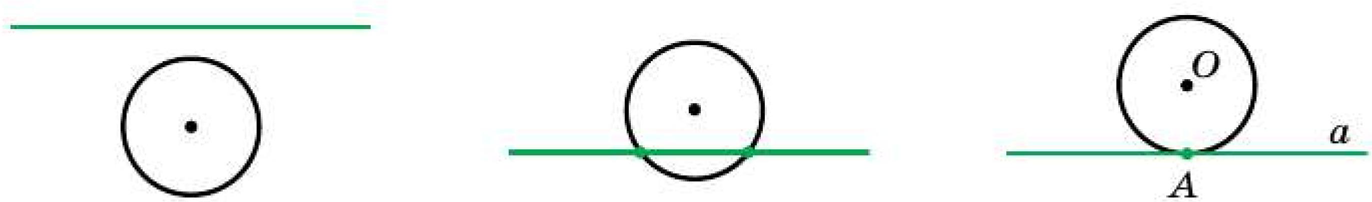
Рис. 21.1

Теорема 21.2

Диаметр окружности, делящий хорду, отличную от диаметра, пополам, перпендикулярен этой хорде.

Докажите эту теорему самостоятельно. Подумайте, будет ли верным это утверждение, если хорда является диаметром окружности.

На рисунке 21.2 показаны все возможные случаи взаимного расположения прямой и окружности: они не имеют общих точек (рис. 21.2, *а*), имеют две общие точки (рис. 21.2, *б*), имеют одну общую точку (рис. 21.2, *в*).



а б в

Рис. 21.2

Определение

Прямую, имеющую с окружностью только одну общую точку, называют касательной к окружности.

На рисунке 21.2, *в* прямая a — касательная к окружности с центром в точке O, A — **точка касания**.

Касательная к окружности имеет только одну общую точку с кругом, ограниченным этой окружностью. Также говорят, что эта прямая является **касательной к кругу**, ограниченному данной окружностью. Так, на рисунке 21.3 прямая a — касательная к кругу с центром в точке O.

Если отрезок (луч) принадлежит касательной к окружности и имеет с этой окружностью общую точку, то говорят, что отрезок (луч) *касается* окружности. Например, на рисунке 21.4 изображён отрезок AB, который касается окружности в точке C.

Теорема 21.3

(свойство касательной)

Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания.

Доказательство

На рисунке 21.5 изображена окружность с центром O, A — точка касания прямой a и окружности. Надо доказать, что $OA \perp a$.

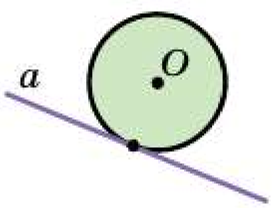


Рис. 21.3

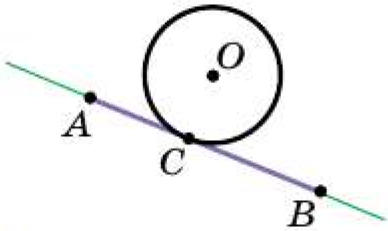


Рис. 21.4

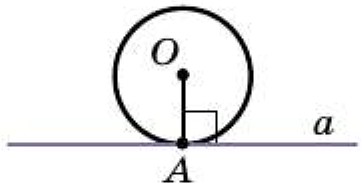


Рис. 21.5

Предположим, что это не так, т. е. отрезок OA — наклонная к прямой a. Тогда из точки O опустим перпендикуляр OM на прямую a (рис. 21.6). Поскольку точка A — единственная общая точка прямой a и круга с центром O, ограниченного данной окружностью, то точка M не принадлежит этому кругу. Отсюда $OM = MB + OB$, где B — точка пересечения окружности и перпендикуляра OM. Отрезки OA и OB равны как радиусы окружности. Таким образом, $OM > OA$. Получили противоречие: перпендикуляр OM больше наклонной OA. Следовательно, $OA \perp a$. ■

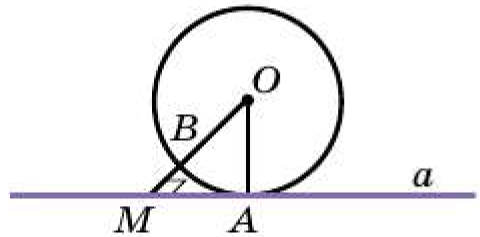


Рис. 21.6

Теорема 21.4

(признак касательной к окружности)

Если прямая, проходящая через точку окружности, перпендикулярна радиусу, проведённому в эту точку, то эта прямая является касательной к данной окружности.

Доказательство

На рисунке 21.5 изображена окружность с центром O, отрезок OA — её радиус, точка A принадлежит прямой a, $OA \perp a$. Докажем, что прямая a — касательная к окружности.

Пусть прямая a не является касательной, а имеет ещё одну общую точку B с окружностью (рис. 21.7). Тогда отрезки OA и OB равны как радиусы, следовательно, треугольник AOB равнобедренный. Заметим, что $\angle OAB = 90°$. Тогда $\angle OBA = \angle OAB = 90°$. По-

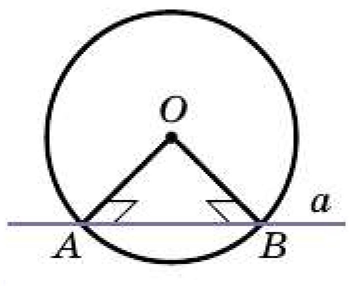


Рис. 21.7

лучили противоречие: в треугольнике AOB есть два прямых угла. Следовательно, прямая a является касательной к окружности. ■

Следствие

Если расстояние от центра окружности до некоторой прямой равно радиусу окружности, то эта прямая является касательной к данной окружности.

Докажите это следствие самостоятельно.

Задача. Докажите, что если через данную точку к окружности проведены две касательные, то отрезки касательных, соединяющих данную точку с точками касания, равны.

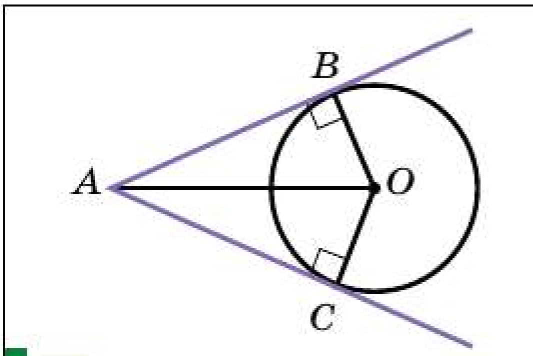


Рис. 21.8

Решение. На рисунке 21.8 изображена окружность с центром O. Прямые AB и AC — касательные, B и C — точки касания. Надо доказать, что $AB = AC$.

Проведём радиусы OB и OC в точки касания. По свойству касательной (теорема 21.3) $OB \perp AB$ и $OC \perp AC$. В прямоугольных треугольниках AOB и AOC катеты OB и OC равны как радиусы одной окружности, отрезок AO — общая гипотенуза. Следовательно, треугольники AOB и AOC равны по гипотенузе и катету. Отсюда $AB = AC$. ■

1. Как делит хорду перпендикулярный ей диаметр?
2. Чему равен угол между хордой, отличной от диаметра, и диаметром, делящим эту хорду пополам?
3. Опишите все возможные случаи взаимного расположения прямой и окружности.
4. Какую прямую называют касательной к окружности?
5. Каким свойством обладает радиус, проведённый в точку касания прямой и окружности?
6. Сформулируйте признак касательной к окружности.
7. Каким свойством обладают касательные, проведённые к окружности через одну точку?

Практические задания

21.1. Начертите окружность с центром O, проведите хорду AB. Пользуясь угольником, разделите эту хорду пополам.

21.2. Начертите окружность с центром O, проведите хорду CD. Пользуясь линейкой со шкалой, проведите диаметр, перпендикулярный хорде CD.

21.3. Начертите окружность, отметьте на ней точки A и B. Пользуясь линейкой и угольником, проведите прямые, касающиеся окружности в точках A и B.

21.4. Проведите прямую a и отметьте на ней точку M. Пользуясь угольником, линейкой и циркулем, постройте окружность радиуса 3 см, касающуюся прямой a в точке M. Сколько таких окружностей можно построить?

Упражнения

21.5. На рисунке 21.9 точка O — центр окружности, диаметр CD перпендикулярен хорде AB. Докажите, что $\angle AOD = \angle BOD$.

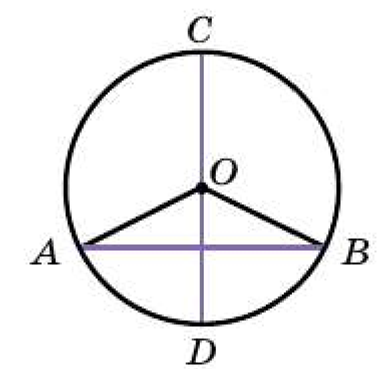


Рис. 21.9

21.6. Докажите, что равные хорды окружности равноудалены от её центра.

21.7. Докажите, что если хорды окружности равноудалены от её центра, то они равны.

21.8. Можно ли утверждать, что прямая, перпендикулярная радиусу окружности, касается этой окружности?

21.9. Прямая CD касается окружности с центром O в точке A, отрезок AB — хорда окружности, $\angle BAD = 35°$ (рис. 21.10). Найдите угол AOB.

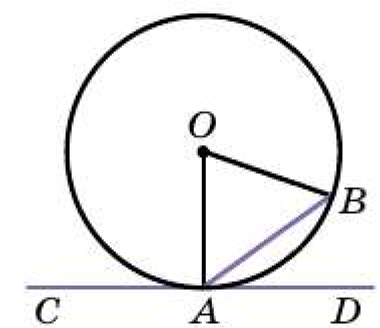


Рис. 21.10

21.10. Прямая CD касается окружности с центром O в точке A, отрезок AB — хорда окружности, $\angle AOB = 80°$ (рис. 21.10). Найдите угол BAC.

21.11. Дана окружность, диаметр которой равен 6 см. Прямая a удалена от её центра: 1) на 2 см; 2) на 3 см; 3) на 6 см. В каком случае прямая a является касательной к окружности?

21.12. В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 90°$. Докажите, что:
1) прямая BC является касательной к окружности с центром A, проходящей через точку C;
2) прямая AB не является касательной к окружности с центром C, проходящей через точку A.

21.13. Докажите, что диаметр окружности больше любой хорды, отличной от диаметра.

21.14. В окружности с центром O через середину радиуса провели перпендикулярную ему хорду AB. Докажите, что $\angle AOB = 120°$.

21.15. Найдите угол между радиусами OA и OB окружности, если расстояние от центра O окружности до хорды AB в 2 раза меньше: 1) длины хорды AB; 2) радиуса окружности.

21.16. В окружности провели диаметр AB и хорды AC и CD так, что $AC = 12$ см, $\angle BAC = 30°$, $AB \perp CD$. Найдите хорду CD.

21.17. Две окружности имеют общий центр. Прямая пересекает бóльшую окружность в точках A и B, а меньшую — в точках C и D. Докажите, что $AC = BD$.

21.18. Через точку M к окружности с центром O провели касательные MA и MB, A и B — точки касания, $\angle OAB = 20°$. Найдите угол AMB.

21.19. Через концы хорды AB, равной радиусу окружности, провели две касательные, пересекающиеся в точке C. Найдите угол ACB.

21.20. Через точку C окружности с центром O провели касательную к этой окружности, хорда AB — диаметр окружности. Из точки A на касательную опущен перпендикуляр AD. Докажите, что луч AC — биссектриса угла BAD.

21.21. Прямая AC касается окружности с центром O в точке A (рис. 21.11). Докажите, что угол BAC в 2 раза меньше угла AOB.

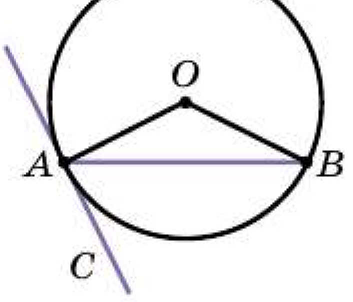


Рис. 21.11

21.22. Отрезки AB и BC — соответственно хорда и диаметр окружности, $\angle ABC = 30°$. Через точку A провели касательную к окружности, пересекающую прямую BC в точке D. Докажите, что треугольник ABD равнобедренный.

21.23. Известно, что диаметр AB делит хорду CD пополам, но не перпендикулярен ей. Докажите, что хорда CD также является диаметром.

21.24. Найдите геометрическое место центров окружностей, которые касаются данной прямой в данной точке.

21.25. Найдите геометрическое место центров окружностей, которые касаются обеих сторон данного угла.

21.26. Найдите геометрическое место центров окружностей, которые касаются данной прямой.

21.27. Хорда CD окружности пересекает её диаметр AB в точке M. Известно, что $CM = 5$ см, $MD = 3$ см, $\angle CMB = 45°$. Найдите расстояние от центра окружности до хорды.

21.28. Хорда CD окружности пересекает её диаметр AB в точке M. Известно, что $CM = 8$ см, $MD = 5$ см, $AM = 4$ см, $MB = 10$ см. Найдите угол CMB.

21.29. Вершина M равностороннего треугольника CMD принадлежит окружности с центром O, а вершины C и D — хорде AB этой окружности. Известно, что $AC = CD = DB$. Найдите угол AOB.

21.30. Через точку P, лежащую вне окружности, проведены две прямые, одна из которых пересекает окружность в точках A и B, а другая — в точках C и D. Точка A лежит между точками P и B, точка C — между точками P и D. Известно, что $AB = CD$. Докажите, что $PA = PC$.

21.31. Через точку P, лежащую вне окружности, проведены две прямые, одна из которых пересекает окружность в точках A и B, а другая — в точках C и D. Точка A лежит между точками P и B, точка C — между точками P и D. Известно, что $PB = PD$. Докажите, что $AB = CD$.

21.32. На стороне CA прямого угла ACB отметили точки M и N так, что $CM = 4$ см и $CN = 6$ см. Найдите радиус окружности, проходящей через точки M и N и касающейся луча CB.

21.33. На стороне CA прямого угла ACB отметили точки M и N так, что $CM = 3$ см и $CN = 9$ см. Окружность радиуса 6 см проходит через точки M и N. Докажите, что эта окружность касается прямой CB.

21.34. Через точку M, лежащую вне окружности с центром O, проведены касательные MA и MB к окружности (A и B — точки касания). Известно, что окружность делит отрезок MO пополам. В каком отношении прямая AB делит отрезок MO?

21.35. Через точку M, лежащую вне окружности с центром O, проведены касательные MA и MB к окружности (A и B — точки касания). Отрезок OM пересекает окружность в точке K. Известно, что прямая AB делит отрезок OK пополам. В каком отношении точка K делит отрезок MO?

21.36. Прямые, касающиеся окружности с центром O в точках A и B, пересекаются в точке K, $\angle AKB = 120°$. Докажите, что $AK + BK = OK$.

21.37. Точки M, N и K — середины соответственно сторон AB, BC и CA равностороннего треугольника ABC. Окружность проходит через точки M, B и N. Докажите, что прямая KN является касательной к этой окружности.

§ 22 Описанная и вписанная окружности треугольника

Определение

Окружность называют описанной около треугольника, если она проходит через все его вершины.

На рисунке 22.1 изображена окружность, описанная около треугольника. В этом случае также говорят, что **треугольник вписан в окружность.**

На рисунке 22.1 точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Отрезки OA, OB и OC — радиусы этой окружности, поэтому $OA = OB = OC$. Следовательно, центр описанной окружности треугольника равноудалён от всех его вершин.

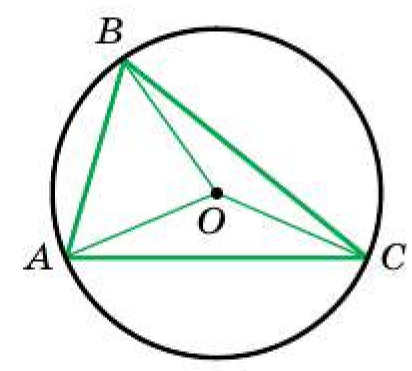


Рис. 22.1

Теорема 22.1

Около любого треугольника можно описать окружность.

Доказательство

Для доказательства достаточно показать, что для любого треугольника ABC существует точка O, равноудалённая от всех его вершин. Тогда точка O будет центром описанной окружности, а отрезки OA, OB и OC — её радиусами.

На рисунке 22.2 изображён произвольный треугольник ABC. Проведём серединные перпендикуляры k и l сторон AB и AC соответственно. Пусть O — точка пересечения этих прямых. Поскольку точка O принадлежит серединному перпендикуляру k, то $OA = OB$. Поскольку точка O принадлежит серединному перпендикуляру l, то $OA = OC$. Значит, $OA = OB = OC$, т. е. точка O равноудалена от всех вершин треугольника. ■

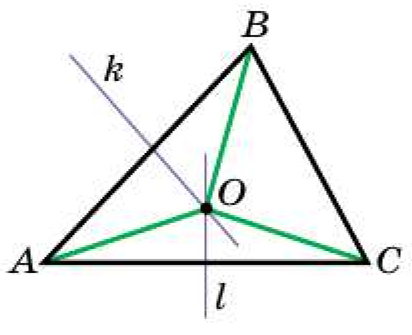


Рис. 22.2

Заметим, что около треугольника можно описать только одну окружность. Это следует из того, что серединные перпендикуляры k и l (см. рис. 22.2) имеют только одну точку пересечения. Следовательно, существует только одна точка, равноудалённая от всех вершин треугольника.

Следствие 1

Три серединных перпендикуляра сторон треугольника пересекаются в одной точке.

Следствие 2

Центр окружности, описанной около треугольника, — это точка пересечения серединных перпендикуляров сторон треугольника.

Определение

Окружность называют вписанной в треугольник, если она касается всех его сторон.

На рисунке 22.3 изображена окружность, вписанная в треугольник. В этом случае также говорят, что **треугольник описан около окружности**.

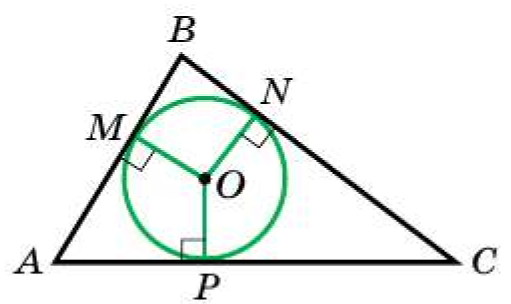


Рис. **22.3**

На рисунке 22.3 точка O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC, отрезки OM, ON и OP — радиусы, проведённые в точки касания, $OM \perp AB$, $ON \perp BC$, $OP \perp AC$. Поскольку $OM = ON = OP$, то *центр вписанной окружности треугольника равноудалён от всех его сторон*.

Теорема 22.2

В любой треугольник можно вписать окружность.

Доказательство

На рисунке 22.4 изображён произвольный треугольник ABC. Проведём биссектрисы углов A и B, отметим точку O их пересечения. Из точки O опустим перпендикуляры OM, ON и OP соответственно на стороны AB, BC и CA треугольника ABC. Поскольку

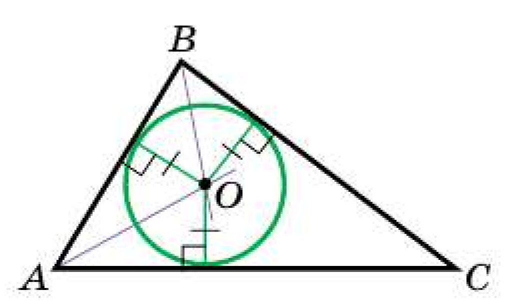


Рис. **22.4**

точка O принадлежит биссектрисе угла A, то по теореме о биссектрисе угла (теорема 20.2) получаем, что $OM = OP$. Аналогично, так как точка O принадлежит биссектрисе угла B, то $OM = ON$. Пусть $OM = r$. Тогда $OM = ON = OP = r$. Следовательно, точка O удалена от каждой стороны треугольника ABC на одно и то же расстояние r. Тогда в силу следствия из признака касательной к окружности (следствие из теоремы 21.4) точка O является центром окружности радиуса r, которая касается сторон AB, BC и CA. ■

Заметим, что в треугольник можно вписать только одну окружность. Это следует из того, что биссектрисы углов A и B (см. рис. 22.4) пересекаются только в одной точке. Следовательно, существует только одна точка, равноудалённая от сторон треугольника.

Следствие 1

Биссектрисы углов треугольника пересекаются в одной точке.

Следствие 2

Центр окружности, вписанной в треугольник, — это точка пересечения биссектрис треугольника.

Задача. Докажите, что радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, можно найти по формуле $r = \frac{a+b-c}{2}$, где r — радиус вписанной окружности, a и b — катеты, c — гипотенуза.

Решение. В треугольнике ABC имеем: $\angle ACB = 90°$, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, точка O — центр вписанной окружности, M, E и K — точки касания вписанной окружности со сторонами BC, AC и AB соответственно (рис. 22.5).

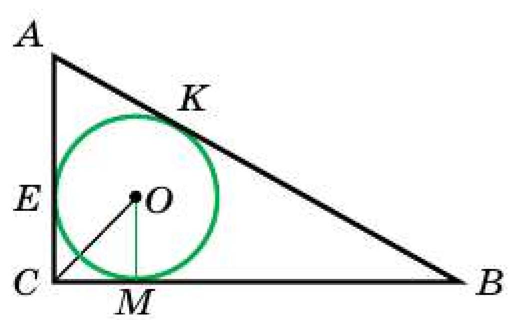


Рис. 22.5

Отрезок OM — радиус окружности, проведённый в точку касания. Тогда $OM \perp BC$.

Так как точка O — центр вписанной окружности, то луч CO — биссектриса угла ACB, следовательно, $\angle OCM = 45°$. Тогда треугольник CMO — равнобедренный прямоугольный. Отсюда $CM = OM = r$.

Используя свойство отрезков касательных, проведённых к окружности через одну точку, получаем, что $CE = CM$. Поскольку $CM = r$, то $CE = r$. Тогда $AK = AE = b - r$, $BK = BM = a - r$.

Так как $AK + BK = AB$, то $b - r + a - r = c$. Отсюда $2r = a + b - c$; $r = \frac{a + b - c}{2}$. ■

1. Какую окружность называют описанной около треугольника?
2. Какой треугольник называют вписанным в окружность?
3. Около какого треугольника можно описать окружность?
4. Какая точка является центром окружности, описанной около треугольника?
5. Какую окружность называют вписанной в треугольник?
6. Какой треугольник называют описанным около окружности?
7. В какой треугольник можно вписать окружность?
8. Какая точка является центром окружности, вписанной в треугольник?

Практические задания

22.1. Начертите разносторонний остроугольный треугольник.
1) Пользуясь линейкой со шкалой и угольником, найдите центр окружности, описанной около данного треугольника.
2) Опишите около треугольника окружность.
Выполните задания 1 и 2 для разносторонних прямоугольного и тупоугольного треугольников.

22.2. Начертите:
1) равнобедренный остроугольный треугольник;
2) равнобедренный тупоугольный треугольник.
Выполните задания 1 и 2 из упражнения 22.1.

22.3. Перерисуйте в тетрадь рисунок 22.6. Проведите через точки A, B и C окружность, пользуясь линейкой со шкалой, угольником и циркулем.

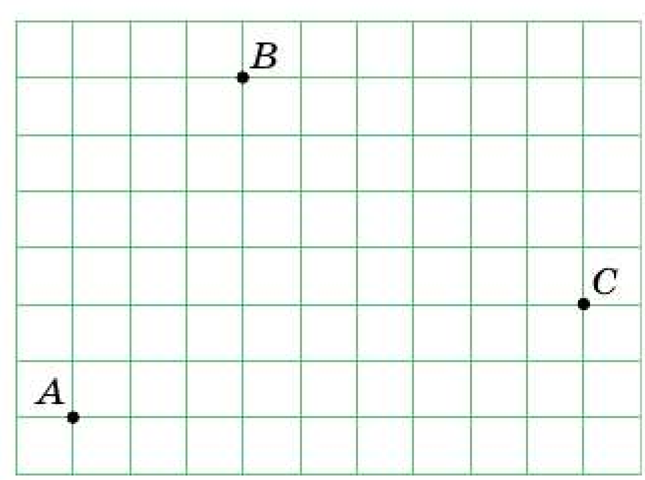


Рис. 22.6

22.4. Начертите разносторонний треугольник.
1) Пользуясь линейкой и транспортиром, найдите центр окружности, вписанной в данный треугольник.
2) Пользуясь угольником, найдите точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника.
3) Впишите в данный треугольник окружность.

22.5. Начертите равнобедренный треугольник. Выполните задания 1, 2 и 3 из упражнения 22.4.

Упражнения

22.6. Докажите, что центр описанной окружности равнобедренного треугольника принадлежит прямой, которая содержит медиану, проведённую к его основанию.

22.7. Докажите, что центр вписанной окружности равнобедренного треугольника принадлежит высоте, проведённой к его основанию.

22.8. Докажите, что если центр вписанной окружности треугольника принадлежит его высоте, то этот треугольник равнобедренный.

22.9. Докажите, что центр описанной окружности равностороннего треугольника является точкой пересечения его биссектрис.

22.10. На рисунке 22.7 в треугольники ABD и CBD вписаны окружности с центрами O_1 и O_2 соответственно. Докажите, что угол O_1DO_2 прямой.

22.11. На рисунке 22.8 в треугольники ABD и CBD вписаны окружности с центрами O_1 и O_2 соответственно, $\angle ABC = 50°$. Найдите угол O_1BO_2.

22.12. Через центр O окружности, описанной около треугольника ABC, провели прямую, перпендикулярную стороне AC и пересекающую сторону AB в точке M. Докажите, что $AM = MC$.

22.13. Окружность, вписанная в треугольник ABC (рис. 22.9), касается его сторон в точках M, K и E, $BK = 2$ см, $KC = 4$ см, $AM = 8$ см. Найдите периметр треугольника ABC.

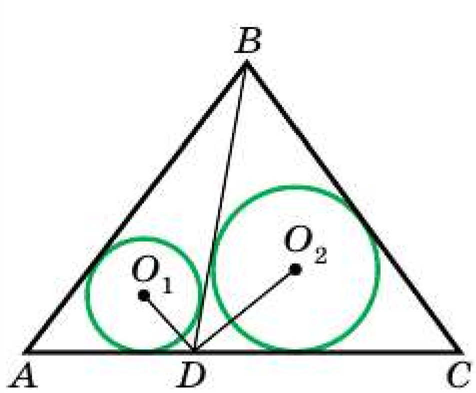


Рис. 22.7

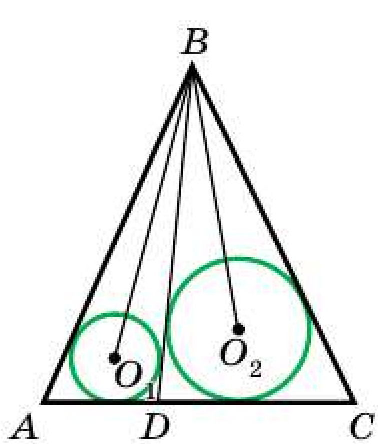


Рис. 22.8

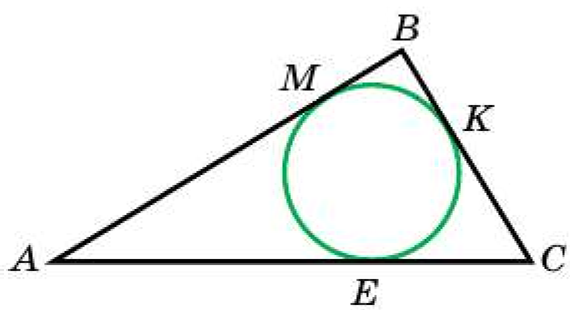


Рис. 22.9

22.14. Докажите, что если центр окружности, описанной около треугольника, принадлежит его высоте, то этот треугольник равнобедренный.

22.15. Докажите, что если центр окружности, вписанной в треугольник, принадлежит его медиане, то этот треугольник равнобедренный.

21.16. Докажите, что если центры вписанной и описанной окружностей треугольника совпадают, то этот треугольник равносторонний.

22.17. В двух равнобедренных треугольниках равны основания и радиусы описанных окружностей. Можно ли утверждать, что эти треугольники равны?

22.18. В двух равнобедренных треугольниках равны основания и радиусы вписанных окружностей. Можно ли утверждать, что эти треугольники равны?

22.19. Точка касания вписанной окружности равнобедренного треугольника делит его боковую сторону в отношении 7 : 5, считая от вершины равнобедренного треугольника. Найдите стороны треугольника, если его периметр равен 68 см.

22.20. Периметр треугольника ABC, описанного около окружности, равен 52 см. Точка касания окружности со стороной AB делит эту сторону в отношении 2 : 3, считая от вершины A. Точка касания со стороной BC удалена от вершины C на 6 см. Найдите стороны треугольника.

22.21. В треугольник с углами 30°, 70° и 80° вписана окружность. Найдите углы треугольника, вершины которого являются точками касания вписанной окружности со сторонами данного треугольника.

22.22. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник ABC, касается катетов AC и BC в точках M и N соответственно и гипотенузы AB в точке K. Найдите угол MKN.

22.23. Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник ABC, касается его боковых сторон AB и BC в точках M и N соответственно. Докажите, что $MN \parallel AC$.

22.24. Докажите, что если центр окружности, описанной около треугольника, принадлежит его стороне, то этот треугольник прямоугольный.

22.25. Докажите, что центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, является серединой гипотенузы.

22.26. Докажите, что если центр окружности, описанной около треугольника, лежит внутри треугольника, то этот треугольник остроугольный.

22.27. Докажите, что если центр окружности, описанной около треугольника, лежит вне треугольника, то этот треугольник тупоугольный.

22.28. Докажите, что если треугольник остроугольный, то центр его описанной окружности лежит внутри треугольника, а если треугольник тупоугольный, то — вне треугольника.

22.29. В прямоугольном треугольнике ABC отрезок CD — высота, проведённая к гипотенузе AB. Радиусы окружностей, вписанных в треугольники ACD, BCD и ABC, равны соответственно r_1, r_2 и r. Докажите, что $r_1 + r_2 + r = CD$.

22.30. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен полуразности катетов. Найдите острые углы треугольника.

22.31. Сумма радиусов вписанной и описанной окружностей прямоугольного треугольника равна одному из катетов. Найдите острые углы треугольника.

22.32. На боковой стороне BC равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) отметили точку M так, что $CM = CA$. Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник ABC, совпадает с центром окружности, описанной около треугольника AMC.

22.33. В треугольнике ABC проведена биссектриса AK. Центр окружности, вписанной в треугольник AKB, совпадает с центром окружности, описанной около треугольника ABC. Найдите углы треугольника ABC.

22.34. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон AB и AC соответственно в точках M и N. Докажите, что $BN > MN$.

22.35. В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке M, $BC = a$. Докажите, что $AM = p - a$, где p — полупериметр треугольника ABC.

22.36. Через центр окружности, вписанной в треугольник ABC, провели прямую MN параллельно стороне AB (точки M и N принадлежат соответственно сторонам BC и AC). Найдите периметр четырёхугольника $ABMN$, если известно, что $AB = 5$ см, $MN = 3$ см.

22.37. Прямая, параллельная стороне AB треугольника ABC, пересекает стороны BC и AC в точках M и N соответственно. Известно, что $MN = BM + AN$. Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник ABC, принадлежит отрезку MN.

22.38. В треугольнике ABC отрезок BD — медиана, $AB = 7$ см, $BC = 8$ см. В треугольники ABD и BDC вписали окружности. Найдите расстояние между точками касания этих окружностей с отрезком BD.

22.39. В треугольнике ABC известно, что $AB = 5$ см, $BC = 7$ см, $CA = 4$ см. На стороне BC отметили точку D так, что окружности, вписанные в треугольники ABD и ADC, касаются отрезка AD в одной точке. Найдите отрезок BD.

22.40. Каждый из углов BAC и ACB треугольника ABC разделили на три равные части (рис. 22.10). Докажите, что $\angle AMN = \angle CMN$.

22.41. Точки F и O — центры вписанной и описанной окружностей равнобедренного треугольника ABC соответственно (рис. 22.11). Они находятся на одинаковом расстоянии от его основания AC. Найдите углы треугольника ABC.

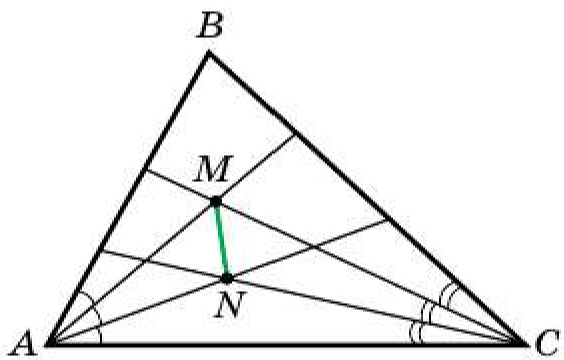


Рис. **22.10**

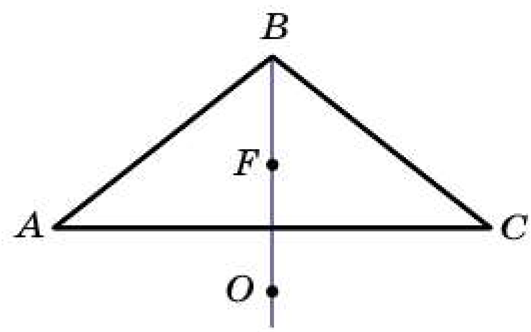


Рис. **22.11**

22.42. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) проведены высота CH и медиана CM. Окружность, вписанная в треугольник HCM, касается сторон CM и CH в точках E и F соответственно. Прямая EF пересекает катеты CA и CB в точках P и Q соответственно. Докажите, что $CP = CQ$.

22.43. На гипотенузу AB прямоугольного треугольника ABC опущена высота CD. Отрезки CK и CM — биссектрисы треугольников ACD и DCB соответственно. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника KCM, является центром окружности, вписанной в треугольник ABC.

22.44. Пусть вершина угла B недоступна (рис. 22.12). С помощью транспортира и линейки без делений постройте прямую, содержащую биссектрису угла B.

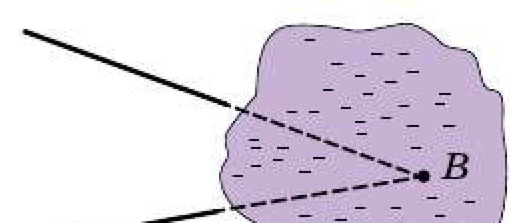


Рис. **22.12**

22.45. Биссектрисы BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке O. Известно, что $AO \perp B_1C_1$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

22.46. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник ABC, касается катетов AC и BC в точках M и N соответственно и гипотенузы AB в точке K. Биссектриса угла A пересекает отрезок NK в точке E. Найдите угол MEK.

22.47. В треугольник ABC вписана окружность с центром O. На прямой BC отметили точки A_1 и A_2, на прямой AC — точки B_1 и B_2, на прямой AB — точки C_1 и C_2 так, что $OA_1 = OA_2 = OA$, $OB_1 = OB_2 = OB$ и $OC_1 = OC_2 = OC$. Докажите, что $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = AB + BC + AC$.

22.48. Две вершины треугольника расположены в точках A и B, а третья вершина X перемещается так, что разность $XA - XB$ равна d, где d — заданное число. Докажите, что центры окружностей, вписанных в треугольники AXB, принадлежат одной прямой.

§ 23 Вневписанная окружность треугольника

Проведём биссектрисы двух внешних углов с вершинами A и C треугольника ABC (рис. 23.1). Пусть O — точка пересечения этих биссектрис. Эта точка равноудалена от прямых AB, BC и AC.

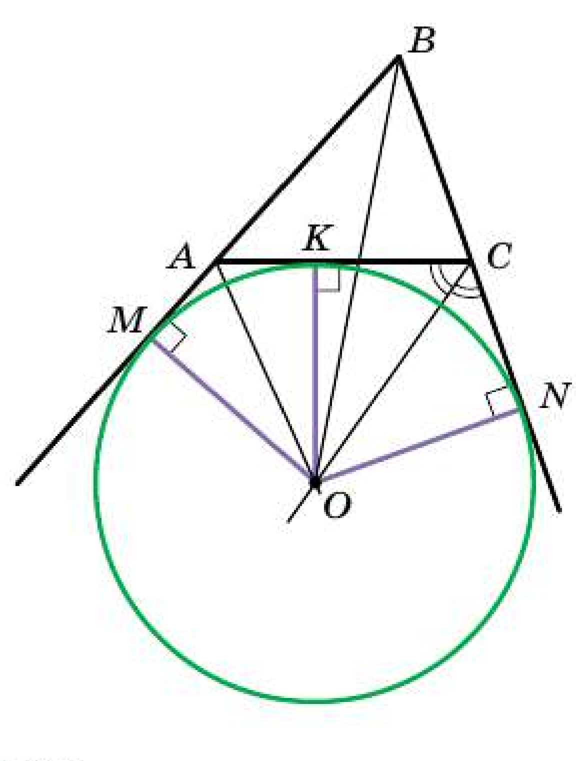


Рис. 23.1

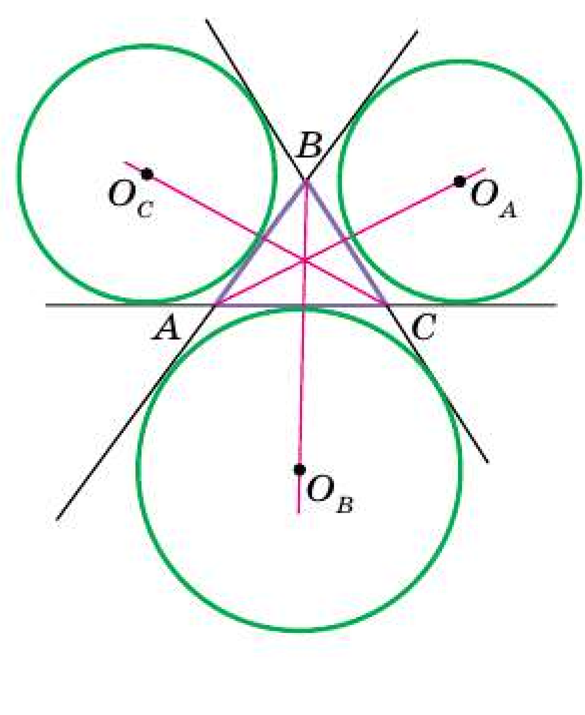


Рис. 23.2

Проведём три перпендикуляра: $OM \perp AB$, $OK \perp AC$, $ON \perp BC$. Длины этих перпендикуляров — это расстояния от точки O до прямых AB, AC и BC. Поэтому $OM = OK = ON$. Следовательно, существует окружность с центром в точке O, касающаяся стороны треугольника и продолжений двух других его сторон. Такую окружность называют **вневписанной окружностью** треугольника ABC (см. рис. 23.1).

Так как $OM = ON$, то точка O принадлежит биссектрисе угла ABC.

Теперь можно сделать такой вывод: *биссектрисы двух внешних углов треугольника и угла треугольника, не смежного с данными внешними углами, пересекаются в одной точке.*

Очевидно, что любой треугольник имеет три вневписанных окружности (рис. 23.2) с центрами O_A, O_B и O_C, касающиеся сторон BC, AC и AB соответственно. Радиусы этих окружностей обозначим соответственно r_A, r_B и r_C.

Задача 1. Вневписанная окружность треугольника ABC касается продолжения стороны AB за точку A в точке M. Докажите, что $BM = p$, где p — полупериметр треугольника ABC.

Решение. Пусть данная вневписанная окружность с центром O касается стороны AC в точке K, а продолжения стороны BC — в точке N (см. рис. 23.1). По свойству касательных, проведённых к окружности через одну точку, имеем: $CK = CN$, $AK = AM$. Тогда $AC = CN + AM$. Следовательно, периметр треугольника ABC равен сумме $BM + BN$. Однако $BM = BN$. Тогда $BM = BN = p$, где p — полупериметр треугольника ABC. ■

Задача 2. В треугольнике ABC с углом B, равным $120°$, проведены биссектрисы AA_1, BB_1 и CC_1. Найдите угол $A_1B_1C_1$.

Решение. Пусть $\angle MBC$ — внешний угол треугольника ABC при вершине B (рис. 23.3). Очевидно, что $\angle MBC = 60°$. Тогда луч BA_1 — биссектриса угла MBB_1. Следовательно, точка A_1 — центр вневписанной окружности треугольника ABB_1. Тогда луч B_1A_1 — биссектриса угла BB_1C. Аналогично луч B_1C_1 — биссектриса угла AB_1B.

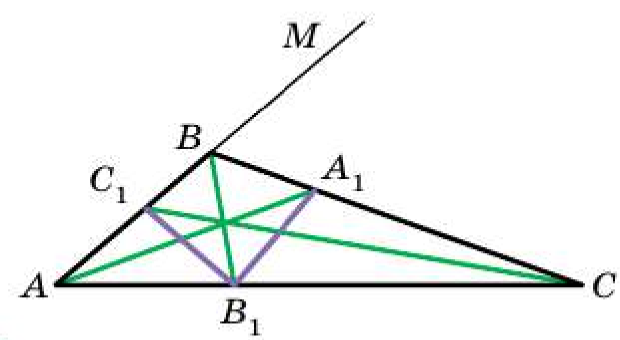


Рис. 23.3

Следовательно, $\angle A_1B_1C_1$ равен половине развёрнутого угла, т. е. $\angle A_1B_1C_1 = 90°$. ■

1. Какую окружность называют вневписанной окружностью треугольника?

2. Сколько вневписанных окружностей имеет треугольник?

Упражнения

23.1. Треугольник ABC равнобедренный ($AB = BC$). Докажите, что прямая BO_B делит отрезок AC пополам.

23.2. Докажите, что если центр вневписанной окружности треугольника принадлежит прямой, содержащей его высоту, то этот треугольник равнобедренный.

23.3. Угол A треугольника ABC равен $40°$. Найдите угол BO_AC.

23.4. Центр вписанной окружности, центр вневписанной окружности и одну из вершин треугольника соединили отрезками и получили некоторый треугольник. Докажите, что полученный треугольник прямоугольный.

23.5. Докажите, что вершины треугольника ABC принадлежат сторонам треугольника $O_AO_BO_C$.

23.6. Докажите, что высоты треугольника $O_AO_BO_C$ содержат биссектрисы треугольника ABC.

23.7. Вневписанная окружность треугольника ABC касается стороны AC в точке K. Докажите, что $KC = p - a$ и $KA = p - c$, где p — полупериметр треугольника ABC.

23.8. В треугольнике ABC известно, что K и L — точки касания стороны AB со вписанной и вневписанной окружностями соответственно. Докажите, что $AL = BK$.

23.9. В треугольнике ABC радиус вневписанной окружности, касающейся стороны AC, равен полупериметру данного треугольника. Докажите, что угол ABC прямой.

23.10. В прямоугольном треугольнике ABC известно, что $AB = c$, $AC = b$ и $BC = a$. Найдите радиус вневписанной окружности, касающейся гипотенузы AC.

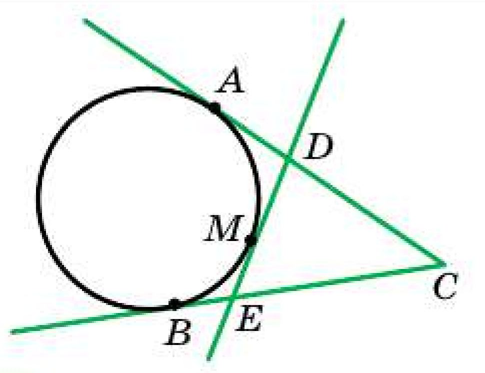


Рис. 23.4

23.11. Через точку C проведены касательные AC и BC к окружности, A и B — точки касания (рис. 23.4). На окружности отметили произвольную точку M, лежащую в одной полуплоскости с точкой C относительно прямой AB. Через точку M провели касательную к окружности, пересекающую прямые AC и BC в точках D и E соответственно. Докажите, что периметр треугольника DEC не зависит от выбора точки M.

23.12. К окружности, вписанной в равносторонний треугольник со стороной a, провели касательную, пересекающую две стороны треугольника. Найдите периметр треугольника, который эта касательная отсекает от данного.

23.13. В равнобедренный треугольник с основанием 12 см вписана окружность, а к ней проведены три касательные так, что они отсекают от данного треугольника три треугольника по одному возле каждой вершины. Сумма периметров трёх образовавшихся треугольников равна 48 см. Найдите боковую сторону данного треугольника.

23.14. В треугольник со сторонами 6 см, 10 см и 12 см вписана окружность. К окружности проведена касательная так, что она пересекает две бóльшие стороны треугольника. Найдите периметр треугольника, который касательная отсекает от данного треугольника.

23.15. Пусть вневписанные окружности треугольника, касающиеся сторон AC и BC, касаются прямой AB в точках P и Q соответственно. Докажите, что середина стороны AB совпадает с серединой отрезка PQ.

23.16. Выразите углы треугольника $O_AO_BO_C$ через углы треугольника ABC.

◆ ◆ ◆

23.17. Докажите, что окружность, касающаяся боковых сторон AB и BC равнобедренного треугольника ABC в точках A и C соответственно, проходит через центр вневписанной окружности треугольника ABC.

23.18. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AK и BL. Найдите угол A, если луч KL — биссектриса угла AKC.

23.19. В треугольнике ABC провели биссектрису AE. На стороне AC отметили точку D так, что $\angle BAC + \angle BCA = \angle DBC$. Докажите, что луч DE — биссектриса угла BDC.

23.20. На сторонах AD и CD квадрата $ABCD$ выбраны точки Q и P соответственно так, что $\angle ABQ = 15°$, $\angle PQD = 30°$. Найдите угол QBP.

23.21. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ отметили соответственно точки M и N так, что $\angle MNC = 2\angle NAD$. Найдите угол MAN.

23.22. На сторонах BA и BC равностороннего треугольника ABC отметили соответственно точки M и N так, что $\angle NMA = 2\angle NAC$. Через точку B проведена прямая, параллельная стороне AC и пересекающая прямую MN в точке K. Найдите угол NAK.

23.23. В квадрате $ABCD$ со стороной 1 см на сторонах AB и BC выбраны соответственно точки P и Q так, что периметр треугольника PBQ равен 2 см. Найдите угол PDQ.

23.24. В остроугольном треугольнике ABC провели биссектрису AE и высоту BD. Докажите, что $\angle CDE > 45°$.

23.25. В треугольнике ABC провели биссектрису AE и медиану BM. Известно, что $\angle BAC = 20°$ и $AB = 2BM$. Найдите угол BEM.

23.26. В треугольнике ABC известно, что $\angle B = 100°$, отрезок CE — биссектриса треугольника. На стороне AC отметили точку D так, что $\angle DBC = 20°$. Найдите угол CED.

23.27. В треугольнике ABC известно, что $\angle A = 135°$, отрезок BE — биссектриса треугольника. На стороне BC отметили точку D так, что $\angle BAD = 90°$. Найдите угол BED.

23.28. В треугольнике ABC провели высоту BD (точка D принадлежит стороне AC) и биссектрису AE. Известно, что $\angle AEB = 45°$. Докажите, что $\angle EDC = 45°$.

23.29. В треугольнике ABC провели медиану CD. Известно, что $\angle A = 30°$ и $\angle B = 15°$. Найдите угол ADC.

§ 24 Задачи на построение

С помощью линейки с делениями, циркуля, угольника, транспортира, лекал (рис. 24.1) вам не раз приходилось выполнять различные геометрические построения.

А можно ли обходиться меньшим количеством чертёжных инструментов? Оказывается, что во многих случаях достаточно использовать только *циркуль и линейку без делений*. Например, чтобы провести биссектрису угла, совсем не обязательно иметь транспортир, а разделить отрезок пополам можно и тогда, когда на линейку не нанесена шкала.

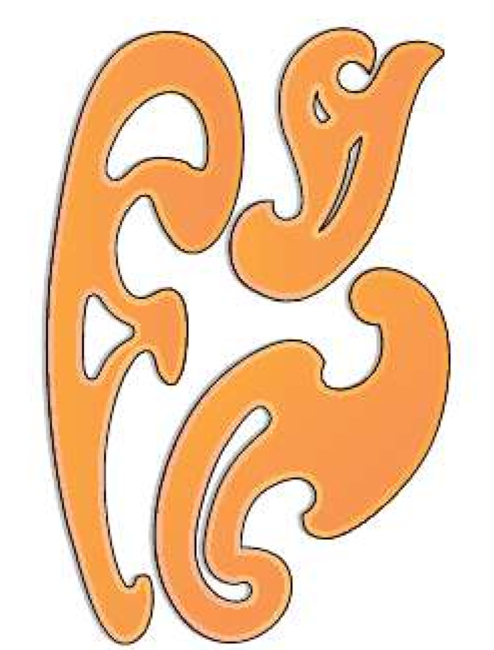


Рис. **24.1**

А стоит ли в наше время, когда созданы точнейшие приборы и совершенные компьютерные программы, позволяющие выполнять сложнейшие измерения и построения, обходиться такими скудными средствами, как циркуль и линейка? На практике, конечно, нет. Поэтому, например, конструкторы, строители, архитекторы, дизайнеры не ограничивают себя в выборе инструментов.

Однако при построении фигур в геометрии договорились придерживаться таких правил:

1) *все построения выполняют только с помощью циркуля и линейки без делений*;

2) *с помощью линейки можно через заданную точку провести прямую, а также через заданные две точки A и B провести прямую AB*;

3) *с помощью циркуля можно построить окружность с данным центром и радиусом, равным заданному отрезку*.

Итак, договоримся, что если в задаче требуется построить какую-то фигуру, то построение выполняют по описанным выше правилам.

Решить задачу на построение — это значит:

1) проанализировав условие, составить план (*алгоритм*) построения фигуры;

2) реализовать план, выполнив построение;

3) доказать, что полученная фигура является искомой.

Вы часто встречались с задачами, которые имели одно, два, бесконечно много решений или вообще решений не имели. Подобные ситуации встречаются и в задачах на построение. Поэтому ещё одним важным этапом решения может стать исследование. Например, если поставлена задача построить треугольник, стороны которого равны 1 см, 2 см и 100 см, то такая задача решений не имеет. Если же надо построить окружность радиуса 5 см с центром в данной точке, то эта задача имеет единственное решение. Как правило, этап исследования завершает задачу на построение.

Рассмотрим основные задачи на построение.

Задача 1. Постройте угол, равный данному, одна из сторон которого является данным лучом.

Решение. На рисунке 24.2 изображены угол A и луч OK. Надо построить угол, равный углу A, одной из сторон которого является луч OK.

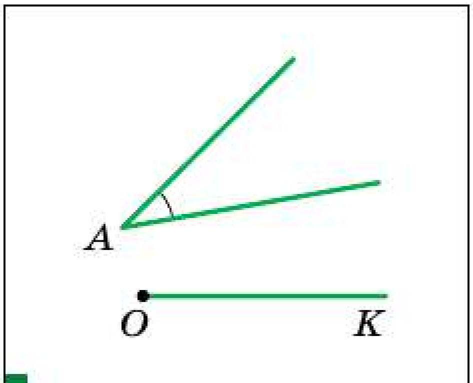


Рис. 24.2

Проведём окружность произвольного радиуса r с центром в точке A. Точки пересечения этой окружности со сторонами угла A обозначим B и C (рис. 24.3). Тогда $AB = AC = r$.

Проведём окружность радиуса r с центром в точке O. Пусть она пересекает луч OK в точке M (рис. 24.4, *а*). Затем проведём окружность радиуса BC с центром в точке M. Пусть окружности с центрами O и M пересекаются в точках E и F (рис. 24.4, *б*). Проведём лучи OE и OF (рис. 24.4, *в*).

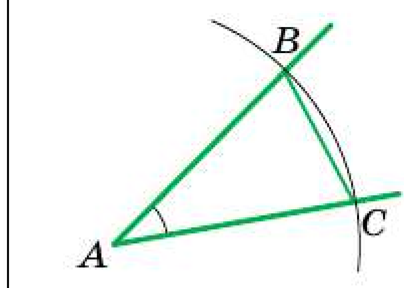


Рис. **24.3**

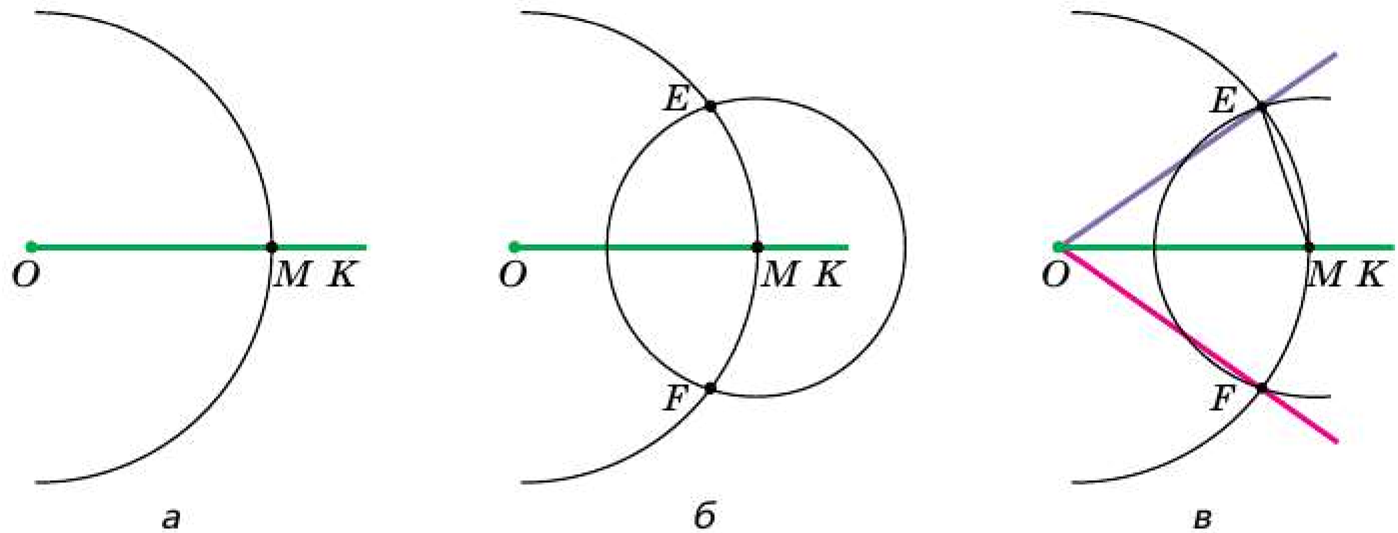


Рис. **24.4**

Покажем, что каждый из углов EOM и FOM — искомый. Докажем, например, что $\angle EOM = \angle BAC$.

Рассмотрим треугольники ABC (рис. 24.3) и OEM (рис. 24.4, *в*). Имеем: $AB = OE = r = AC = OM$. Кроме того, по построению $EM = BC$. Следовательно, треугольники ABC и OEM равны по трём сторонам, т. е. по третьему признаку равенства треугольников. Отсюда $\angle EOM = \angle BAC$. Аналогично можно показать, что $\angle BAC = \angle FOM$. ■

Мы построили два угла EOM и FOM, удовлетворяющие условию задачи. Эти углы равны. В таких случаях считают, что задача на построение имеет одно решение.

Задача 2. Постройте серединный перпендикуляр данного отрезка.

Решение. Пусть AB — данный отрезок (рис. 24.5). Проведём две окружности с центрами A и B и радиусом AB. Точки пересечения этих окружностей обозначим буквами M

Рис. **24.5**

и N (рис. 24.6, *а*). Проведём прямую MN (рис. 24.6, *б*). Докажем, что прямая MN является искомой.

Из построения следует, что $MA = MB = AB$ и $NA = NB = AB$ (рис. 24.7). Следовательно, точки M и N принадлежат серединному перпендикуляру отрезка AB. Тогда прямая MN и является серединным перпендикуляром отрезка AB. ■

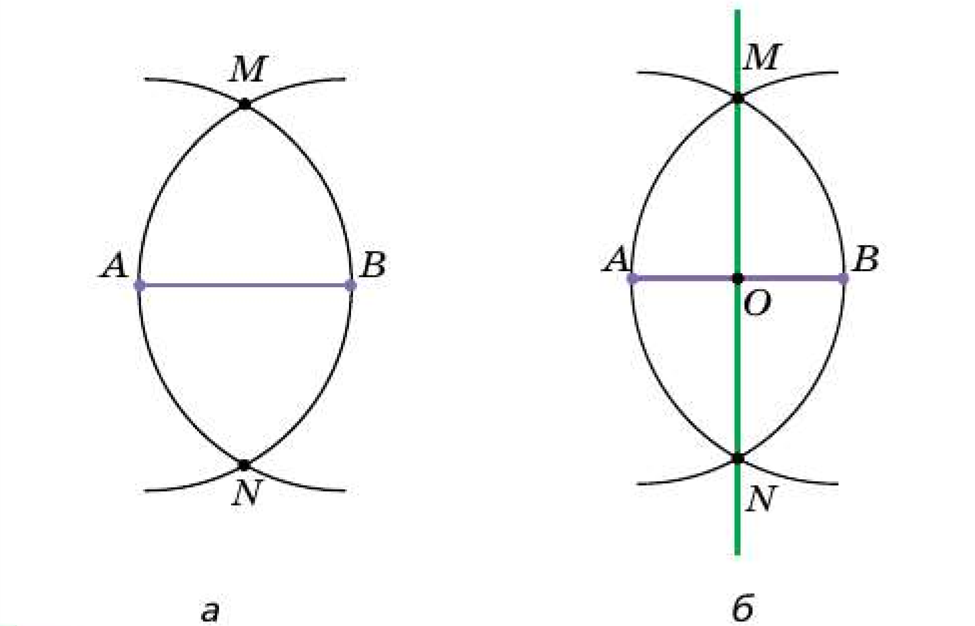


Рис. **24.6**

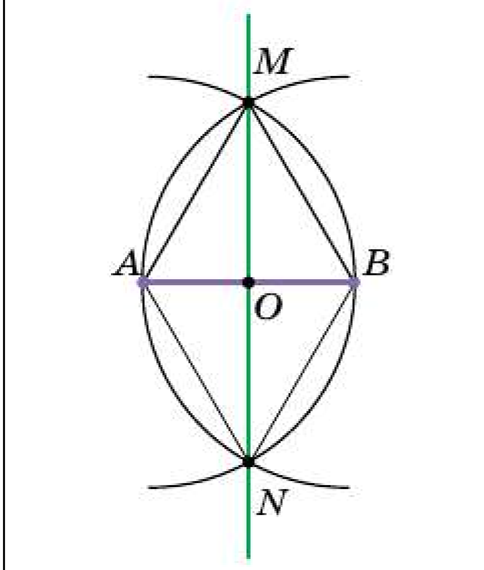


Рис. **24.7**

Поскольку прямая MN пересекает отрезок AB в его середине, точке O, то тем самым решена следующая задача.

Задача 3. Разделите данный отрезок пополам.

Задача 4. Даны прямая и не принадлежащая ей точка. Через эту точку проведите прямую, перпендикулярную данной.

Решение. Пусть m — данная прямая, A — не принадлежащая ей точка. Проведём окружность с центром в точке A так, чтобы она пересекла прямую m в двух точках. Обозначим эти точки буквами M и N (рис. 24.8).

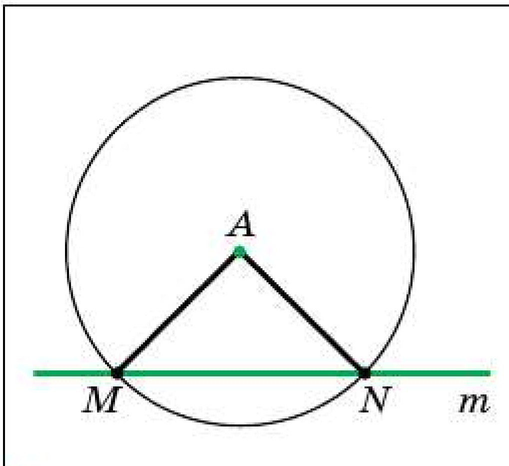


Рис. **24.8**

Поскольку $AM = AN$, то точка A принадлежит серединному перпендикуляру отрезка MN. Построив этот серединный перпендикуляр (см. задачу 2), мы тем самым решим задачу. ■

Задача 5. Даны прямая и принадлежащая ей точка. Через эту точку проведите прямую, перпендикулярную данной.

Решение. Пусть m — данная прямая, A — принадлежащая ей точка. Проведём окружность произвольного радиуса с центром в точке A. Она пересекает прямую m в двух точках. Обозначим эти точки буквами M и N (рис. 24.9).

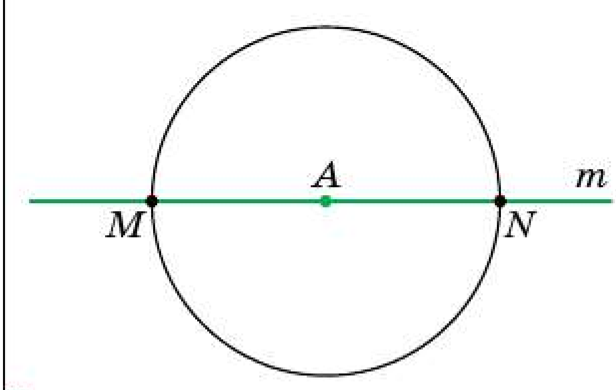


Рис. **24.9**

Поскольку $AM = AN$, то мы свели задачу к построению серединного перпендикуляра отрезка MN. ■

Задача 6. Постройте биссектрису данного угла.

Решение. Пусть A — данный угол. Проведём окружность произвольного радиуса с центром в точке A. Эта окружность пересекает стороны угла в двух точках. Обозначим эти точки буквами M и N (рис. 24.10, *а*). Тем же радиусом проведём две окружности с центрами M и N. Обозначим точку их пересечения, отличную от точки A, буквой K (рис. 24.10, *б*). Проведём луч AK (рис. 24.10, *в*).

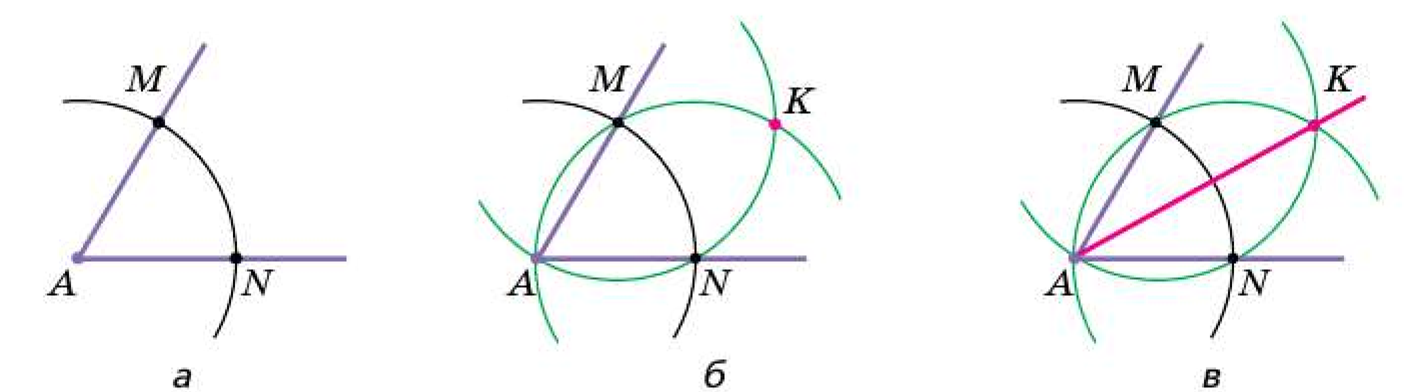


Рис. **24.10**

Докажем, что луч AK — искомая биссектриса.

Действительно, треугольники AMK и ANK (рис. 24.11) равны по трём сторонам, т. е. по третьему признаку равенства треугольников. Следовательно, $\angle MAK = \angle NAK$. ■

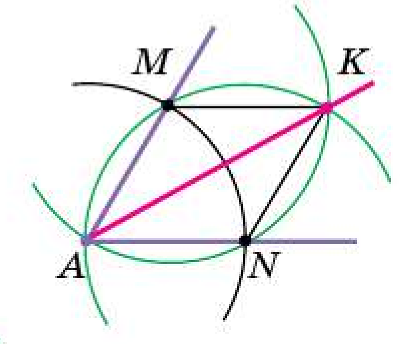


Рис. **24.11**

Задача 7. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и катету.

Решение. Пусть даны два отрезка, длины которых равны c и b, причём $b < c$ (рис. 24.12). Поскольку гипотенуза больше катета, то гипотенуза искомого треугольника равна большему из данных отрезков, а катет — меньшему. Следовательно, надо построить прямоугольный треугольник ABC, в котором $\angle C = 90°$, $AB = c$, $AC = b$.

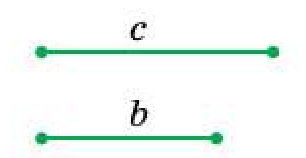


Рис. 24.12

Проведём две перпендикулярные прямые m и n. Пусть C — точка их пересечения. На прямой m отложим отрезок CA, равный данному катету b (рис. 24.13, *а*). Проведём окружность с центром в точке A радиусом, равным данной гипотенузе c. Пусть эта окружность пересекает прямую n в двух точках B_1 и B_2 (рис. 24.13, *б*). Каждый из треугольников ACB_1 и ACB_2 — искомый.

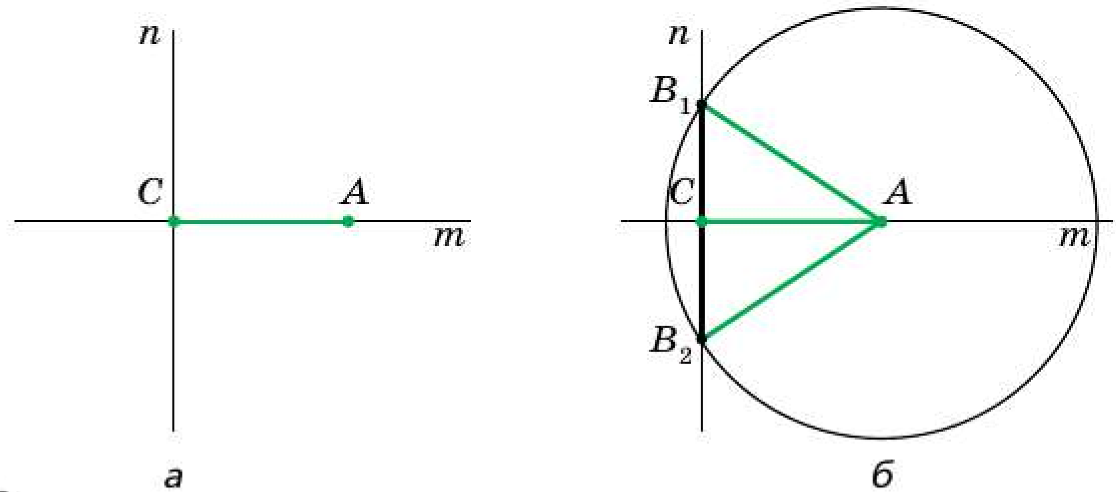


Рис. 24.13

Поскольку треугольники ACB_1 и ACB_2 равны, то задача имеет единственное решение. ■

Задача 8. Постройте треугольник по стороне и высотам, проведённым к двум другим сторонам.

Решение. На рисунке 24.14 изображён треугольник ABC, отрезки AA_1 и CC_1 — его высоты. Если известны отрезки AC, AA_1 и CC_1, то можно построить прямоугольные треугольники AA_1C и CC_1A по гипотенузе и катету (см. задачу 7).

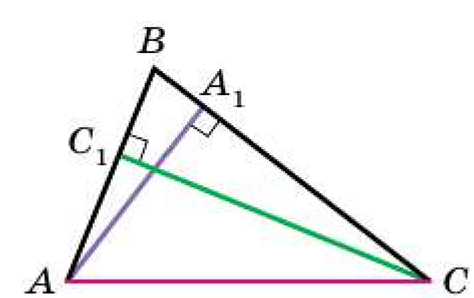


Рис. 24.14

Приведённые рассуждения называют **анализом задачи на построение.** Он подсказывает план построения.

Построим прямоугольный треугольник AA_1C, в котором гипотенуза AC равна данной стороне, а катет AA_1 — одной из данных высот (рис. 24.15, *а*). В построенном треугольнике угол ACA_1 равен одному из углов, прилежащих к заданной стороне искомого треугольника. С помощью аналогичного построения можно получить другой прилежащий к данной стороне угол. На рисунке 24.15, *б* это угол C_1AC.

Теперь осталось построить треугольник ABC по стороне AC и двум прилежащим к ней углам. Выполните это построение самостоятельно. ■

Рис. 24.15

Задача 9. Постройте треугольник по углу и проведённым из вершины этого угла высоте и биссектрисе.

Решение. Проведём анализ задачи на построение. На рисунке 24.16 изображён треугольник ABC, в котором отрезок BD — высота, отрезок BK — биссектриса.

Если известны длины отрезков BD и BK, то прямоугольный треугольник BDK можно построить по гипотенузе и катету. Также отметим, что если известен угол ABC, то можно построить углы ABK и KBC, каждый из которых равен $\frac{1}{2}\angle ABC$. Отсюда получаем план построения.

Строим прямоугольный треугольник BDK, в котором гипотенуза BK равна данной биссектрисе, а катет BD — данной высоте (рис. 24.17). Строим два угла, каждый из которых равен половине данного, так, чтобы луч BK был их общей стороной. На рисунке 24.17 это углы ABK и KBC. Треугольник ABC — искомый. ■

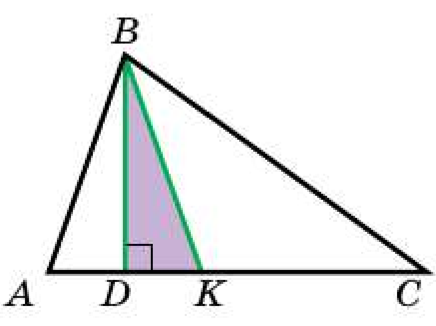


Рис. 24.16

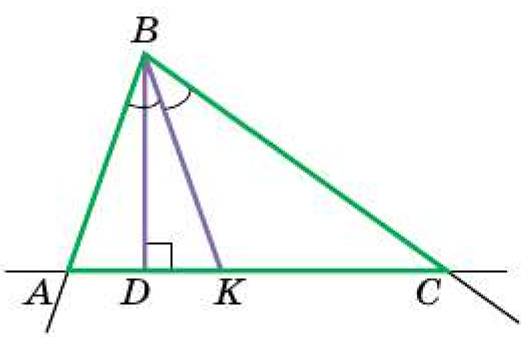


Рис. 24.17

1. С помощью каких инструментов выполняют геометрические построения? Какие построения можно ими выполнять?
2. Что значит решить задачу на построение?

Упражнения

24.1. Начертите: 1) острый угол; 2) тупой угол. Постройте угол, равный начерченному.

24.2. Начертите острый угол ABC и проведите луч DK. Постройте угол MDK такой, что $\angle MDK = 2\angle ABC$.

24.3. Разделите данный отрезок на четыре равные части.

24.4. Начертите произвольный угол. Разделите его на четыре равные части.

24.5. Постройте угол, равный: 1) $45°$; 2) $60°$; 3) $75°$; 4) $120°$.

24.6. Постройте угол, равный: 1) $30°$; 2) $22°30'$; 3) $15°$.

24.7. Начертите: 1) остроугольный треугольник; 2) тупоугольный треугольник. Постройте все высоты этого треугольника.

24.8. Начертите треугольник ABC. Постройте его: 1) высоту AM; 2) медиану BD; 3) биссектрису CK.

24.9. Через данную точку, не принадлежащую данной прямой, проведите прямую, параллельную данной.

24.10. Постройте треугольник:
1) по двум сторонам и углу между ними;
2) по стороне и двум прилежащим углам.

24.11. Постройте окружность данного радиуса, касающуюся данной прямой в данной точке.

24.12. Через данную точку, принадлежащую углу, проведите прямую, отсекающую на сторонах угла равные отрезки.

24.13. Постройте касательную к окружности, проходящую через данную точку окружности.

24.14. Постройте окружность, касающуюся сторон данного угла.

24.15. Дан угол, равный $30°$. Постройте окружность заданного радиуса так, чтобы центр окружности принадлежал одной из сторон данного угла и окружность касалась другой стороны угла.

24.16. Постройте окружность, касающуюся сторон данного угла, причём одной из них — в данной точке.

24.17. Постройте прямоугольный треугольник:
1) по двум катетам;
2) по гипотенузе и острому углу;
3) по катету и прилежащему острому углу.

24.18. Постройте прямоугольный треугольник по катету и противолежащему острому углу.

24.19. Постройте равнобедренный треугольник:
1) по боковой стороне и углу при вершине;
2) по высоте, опущенной на основание, и углу при вершине;
3) по основанию и медиане, проведённой к основанию;
4) по основанию и высоте, проведённой к боковой стороне.

24.20. Постройте равнобедренный треугольник:
1) по основанию и углу при основании;
2) по боковой стороне и углу при основании;
3) по боковой стороне и высоте, проведённой к основанию.

24.21. Постройте равнобедренный прямоугольный треугольник:
1) по катету;
2) по гипотенузе.

◆ ◆

24.22. Постройте окружность, центром которой является данная точка на стороне данного острого угла и которая отсекает на другой стороне угла отрезок данной длины.

24.23. Как разделить пополам отрезок, длина которого в несколько раз больше наибольшего раствора циркуля?

24.24. Постройте прямоугольный треугольник:
1) по острому углу и биссектрисе этого угла;
2) по катету и высоте, проведённой к гипотенузе.

24.25. Постройте прямоугольный треугольник:
1) по катету и медиане, проведённой к другому катету;
2) по острому углу и высоте, проведённой из вершины прямого угла.

24.26. Постройте равнобедренный треугольник по основанию и радиусу вписанной окружности.

24.27. Постройте треугольник по стороне, прилежащему к ней углу и биссектрисе треугольника, проведённой из вершины этого угла.

24.28. Постройте треугольник по стороне, медиане, проведённой к одной из двух других сторон, и углу между данной стороной и медианой.

24.29. Постройте треугольник по стороне, прилежащему к ней острому углу и высоте, проведённой к данной стороне.

24.30. Постройте треугольник по двум сторонам и высоте, проведённой к одной из этих сторон. Сколько решений может иметь задача?

24.31. Постройте треугольник по стороне и проведённым из одного и того же конца данной стороны медиане и высоте. Сколько решений может иметь задача?

24.32. Постройте треугольник по стороне и проведённым к этой стороне высоте и медиане.

24.33. Постройте треугольник по высоте и двум углам, которые эта высота образует со сторонами треугольника, имеющими с высотой общую вершину. Сколько решений может иметь задача?

24.34. Постройте треугольник по двум сторонам и высоте, проведённой к третьей стороне. Сколько решений может иметь задача?

24.35. Постройте треугольник по двум сторонам и углу, противолежащему одной из этих сторон. Сколько решений может иметь задача?

24.36. Постройте треугольник по стороне, прилежащему углу и медиане, проведённой к данной стороне. Сколько решений может иметь задача?

24.37. Постройте треугольник по углу и высотам, проведённым из вершин двух других углов.

24.38. Постройте треугольник по двум высотам и углу, из вершины которого проведена одна из данных высот. Сколько решений может иметь задача?

24.39. Постройте прямоугольный треугольник по катету и радиусу вписанной окружности.

24.40. Постройте треугольник по стороне, прилежащему к ней углу и радиусу вписанной окружности.

24.41. Постройте треугольник по радиусу вписанной окружности и отрезкам, на которые точка касания вписанной окружности делит одну из сторон.

24.42. Постройте треугольник, если даны три точки, в которых вписанная окружность касается его сторон.

24.43. По точкам O_A, O_B и O_C, являющимся центрами вневписанных окружностей треугольника ABC, восстановите треугольник ABC.

24.44. По точкам O_A, O_B и O, где точка O — центр вписанной окружности треугольника ABC, восстановите треугольник ABC.

§ 25 Метод геометрических мест точек в задачах на построение

Известно, что если смешать синий и жёлтый цвета, то получим зелёный. Пусть на плоскости надо найти точки, обладающие какими-то двумя свойствами одновременно. Если синим цветом покрасить точки, обладающие первым свойством, а жёлтым — обладающие вторым свойством, то понятно, что зелёные точки будут обладать сразу двумя свойствами. В этом и состоит идея метода ГМТ в задачах на построение. Решим с помощью этого метода несколько задач.

Задача 1. Постройте треугольник по трём данным его сторонам.

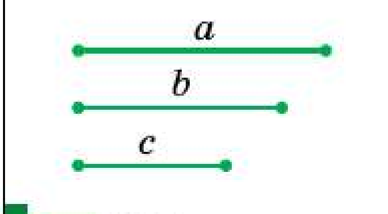


Рис. **25.1**

Решение. Пусть даны три отрезка, длины которых равны a, b и c (рис. 25.1). Надо построить треугольник ABC, в котором $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$.

Проведём произвольную прямую. С помощью циркуля отложим на ней отрезок BC, равный a (рис. 25.2). Задача свелась к построению третьей вершины треугольника, точки A.

Воспользуемся тем, что точка A обладает сразу двумя свойствами:

1) принадлежит геометрическому месту точек, удалённых от точки B на расстояние c, т. е. окружности радиуса c с центром в точке B (на рисунке 25.2 это «зелёная окружность»);

2) принадлежит геометрическому месту точек, удалённых от точки C на расстояние b, т. е. окружности радиуса b с центром в точке C (на рисунке 25.2 это «фиолетовая окружность»).

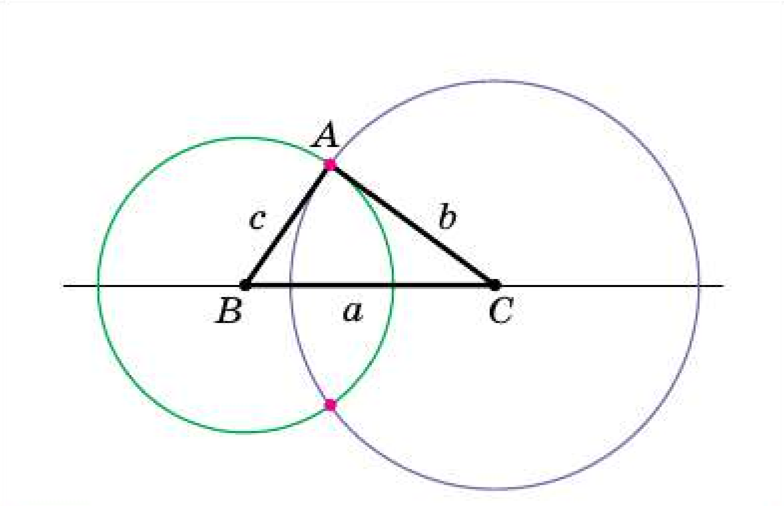


Рис. **25.2**

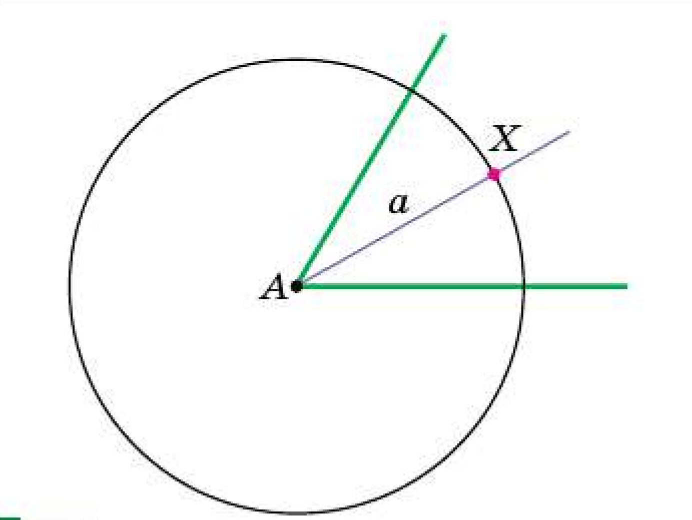


Рис. **25.3**

В качестве точки A можно выбрать любую из двух образовавшихся «зелёных точек».

Полученный треугольник ABC является искомым, поскольку в нём $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. ■

Из описанного построения следует, что *если каждый из трёх данных отрезков меньше суммы двух других, то эти отрезки могут служить сторонами треугольника.*

Задача 2. Постройте фигуру, все точки которой принадлежат данному углу, равноудалены от его сторон и находятся на заданном расстоянии a от его вершины.

Решение. Искомые точки принадлежат сразу двум геометрическим местам точек: биссектрисе данного угла и окружности с центром в вершине угла и радиусом, равным a.

Построим биссектрису угла и указанную окружность (рис. 25.3). Их пересечением является искомая точка X. ■

Задача 3. Постройте центр окружности данного радиуса R, которая проходит через данную точку M и касается данной прямой a.

Решение. Поскольку окружность касается прямой a, то её центр находится на расстоянии R от этой прямой. Геометрическим местом точек, удалённых от данной прямой на данное расстояние, являются две параллельные прямые (см. задачу 20.23). Следовательно, центр окружности находится на прямой b или на прямой c (рис. 25.4).

Геометрическое место точек, являющихся центрами окружностей радиуса R, проходящих через точку M, — это окружность радиуса R с центром в точке M. Поэтому в качестве центра искомой окружности можно выбрать любую из точек пересечения построенной окружности и одной из прямых b или c в зависимости от того, в какой полуплоскости находится точка M относительно прямой a (на рисунке 25.5 это точки O_1 и O_2).

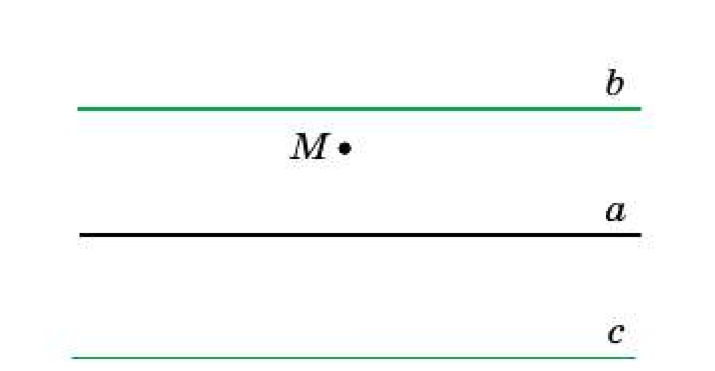


Рис. 25.4

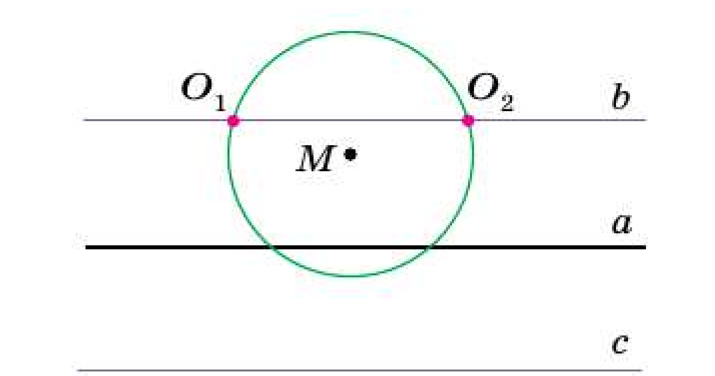


Рис. 25.5

Если построенная окружность не имеет общих точек ни с прямой b, ни с прямой c, то задача не имеет решений.

Построение для случая, когда данная точка принадлежит данной прямой, рассмотрите самостоятельно. ■

В задаче 3 мы рассмотрели ситуацию, когда задача имеет два решения. Подумайте, сколько решений может иметь задача в зависимости от взаимного расположения точки M и прямой a, а также значения величины R.

Задача 4. Постройте треугольник по стороне, медиане, проведённой к этой стороне, и радиусу описанной окружности.

Решение. Построим окружность данного радиуса и проведём хорду AB, равную стороне искомого треугольника. Тогда концы хорды являются двумя вершинами искомого треугольника. Понятно, что третья вершина принадлежит одновременно построенной окружности («чёрная окружность») и окружности с центром в точке O, являющейся серединой хорды AB, и радиусом, равным данной медиане («зелёная окружность»). Каждый из треугольников ABC_1 и ABC_2 (рис. 25.6) является искомым. ■

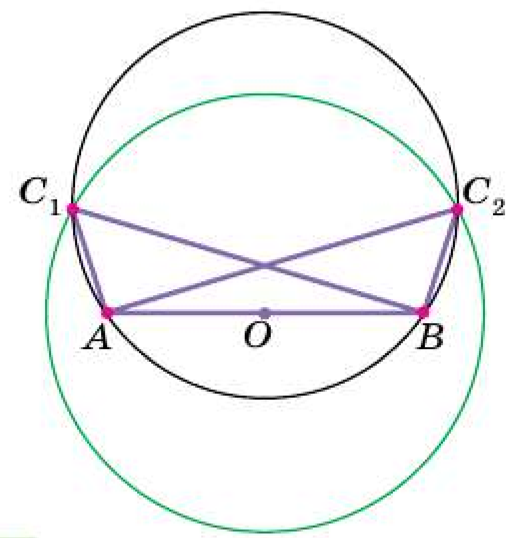


Рис. 25.6

Построение треугольника по трём сторонам (задача 1), а также условия, при которых три данных отрезка могут служить сторонами треугольника, помогают исследовать возможности взаимного расположения двух окружностей.

Рассмотрим окружности с центрами O_1 и O_2 и радиусами R и r ($R > r$) соответственно. Пусть расстояние между центрами этих окружностей, т. е. длина отрезка O_1O_2, равно d.

1) Если $d > R + r$, то отрезки, длины которых равны d, R и r, не могут служить сторонами треугольника. Тогда данные окружности не имеют общих точек и расположены так, как показано на рисунке 25.7.

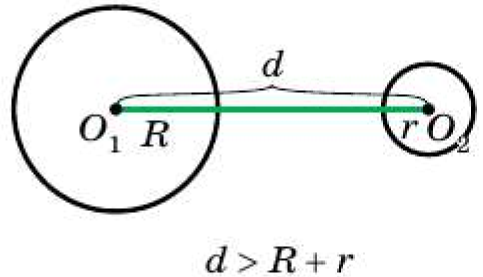


Рис. 25.7

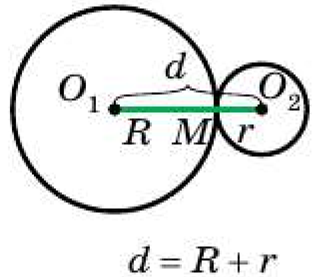


Рис. 25.8

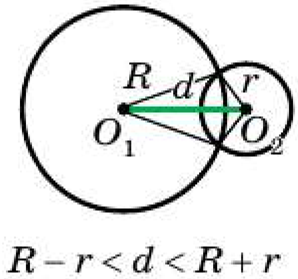


Рис. 25.9

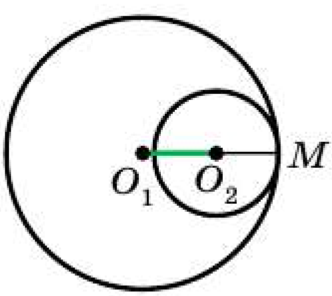
2) Если $d = R + r$, то на отрезке O_1O_2 существует такая точка M, что $O_1M = R$ и $MO_2 = r$. Тогда данные окружности имеют только одну общую точку M (рис. 25.8). В этом случае говорят, что **окружности касаются внешним образом**.

3) Если $R - r < d < R + r$, то можно построить треугольник, стороны которого равны d, R и r. Это значит, что данные окружности имеют две общие точки (рис. 25.9).

4) Если $d = R - r$, то $R = d + r$. В этом случае на продолжении отрезка O_1O_2 за точку O_2 существует такая точка M, что $O_1O_2 = d$ и $O_2M = r$. Тогда данные окружности имеют только одну общую точку M (рис. 25.10). В этом случае говорят, что **окружности касаются внутренним образом**.

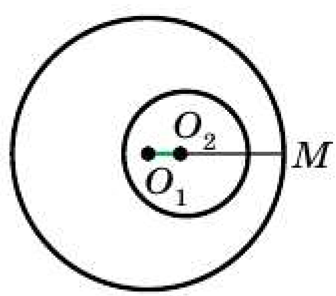
5) Если $d < R - r$, то $R > d + r$. В этом случае на продолжении отрезка O_1O_2 за точку O_2 существует такая точка M, что $O_1M = R$ и $O_2M > r$. Тогда данные окружности не имеют общих точек и окружность меньшего радиуса располагается внутри окружности большего радиуса (рис. 25.11).

6) Если $d = 0$, то центры окружностей совпадают (рис. 25.12). Такие окружности называют **концентрическими**.



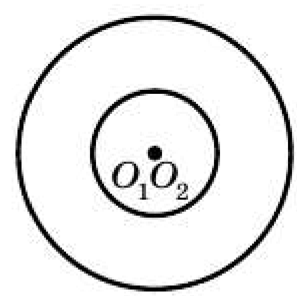
$d = R - r$

Рис. 25.10



$d < R - r$

Рис. 25.11



$d = 0$

Рис. 25.12

Упражнения

25.1. Даны прямая m и точки A и B вне её (рис. 25.13). Постройте на прямой m точку, равноудалённую от точек A и B.

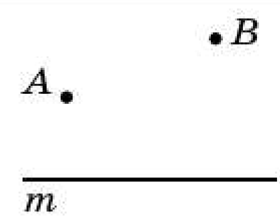


Рис. 25.13

25.2. Точки A и B принадлежат прямой m. Постройте точку, удалённую от прямой m на расстояние a и равноудалённую от точек A и B. Сколько решений имеет задача?

25.3. Точки B и C принадлежат разным сторонам угла A, причём $AB \neq AC$. Постройте точку M, принадлежащую углу, равноудалённую от его сторон и такую, что $MB = MC$.

25.4. Точки B и C принадлежат разным сторонам угла A. Постройте точку D, принадлежащую углу, равноудалённую от его сторон и такую, что $DC = BC$. Сколько решений может иметь задача?

25.5. Постройте равнобедренный треугольник по основанию и боковой стороне.

25.6. Для данной окружности постройте точку, являющуюся её центром.

25.7. Постройте окружность данного радиуса, центр которой принадлежит данной прямой, так, чтобы эта окружность проходила через данную точку.

25.8. Постройте окружность данного радиуса, проходящую через две данные точки.

25.9. Найдите все точки, принадлежащие данной окружности и равноудалённые от концов данного отрезка. Сколько решений может иметь задача?

25.10. Даны две пересекающиеся прямые m и n и отрезок AB. Постройте на прямой m точку, удалённую от прямой n на расстояние AB. Сколько решений имеет задача?

25.11. В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 90°$. На катете AC постройте точку D, удалённую от прямой AB на расстояние CD.

25.12. Постройте равнобедренный треугольник по основанию и радиусу описанной окружности. Сколько решений может иметь задача?

25.13. Постройте треугольник по двум сторонам и медиане, проведённой к одной из данных сторон.

25.14. Постройте равнобедренный треугольник по боковой стороне и медиане, проведённой к боковой стороне.

25.15. На данной окружности постройте точку, находящуюся на данном расстоянии от данной прямой. Сколько решений может иметь задача?

25.16. На данной окружности постройте точку, равноудалённую от двух данных пересекающихся прямых. Сколько решений может иметь задача?

25.17. Между двумя параллельными прямыми дана точка. Постройте окружность, проходящую через эту точку и касающуюся данных прямых. Сколько решений имеет задача?

25.18. Постройте окружность, проходящую через данную точку A и касающуюся данной прямой m в данной точке B.

25.19. Даны две параллельные прямые и секущая. Постройте окружность, касающуюся этих трёх прямых.

25.20. Постройте треугольник по двум сторонам и радиусу описанной окружности. Сколько решений может иметь задача?

25.21. Постройте треугольник по стороне, высоте, проведённой к этой стороне, и радиусу описанной окружности. Сколько решений может иметь задача?

25.22. Постройте равносторонний треугольник по радиусу описанной окружности.

25.23. Три прямые попарно пересекаются и не проходят через одну точку. Постройте точку, равноудалённую от всех трёх прямых. Сколько решений имеет задача?

25.24. Постройте прямоугольный треугольник по катету и сумме гипотенузы и другого катета.

25.25. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и сумме катетов.

25.26. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и разности катетов.

25.27. Постройте прямоугольный треугольник по катету и разности гипотенузы и другого катета.

25.28. Постройте равнобедренный треугольник по основанию и разности боковой стороны и высоты, опущенной на основание.

25.29. Постройте треугольник по стороне, прилежащему к ней углу и сумме двух других сторон.

25.30. Постройте треугольник по стороне, прилежащему к ней углу и разности двух других сторон.

25.31. Постройте треугольник по стороне, противолежащему ей углу и разности двух других сторон.

25.32. Постройте треугольник по стороне, противолежащему ей углу и сумме двух других сторон.

25.33. Постройте треугольник по стороне, разности углов, прилежащих к этой стороне, и сумме двух других сторон.

25.34. Постройте треугольник по периметру и двум углам.

25.35. Постройте остроугольный треугольник по периметру, одному из углов и высоте, проведённой из вершины другого угла.

25.36. Постройте треугольник по высоте и медиане, проведённым из одной вершины, и радиусу описанной окружности.

25.37. Постройте треугольник по двум сторонам и медиане, проведённой к третьей стороне.

25.38. Постройте треугольник по стороне, высоте, проведённой к этой стороне, и медиане, проведённой к одной из двух других сторон.

Из истории геометрических построений

Умение достигать результат, используя минимальные средства, всегда считалось признаком высокого мастерства. Видимо, поэтому в Древней Греции в значительной степени было развито искусство выполнять геометрические построения с помощью только двух инструментов: дощечки с ровным краем (линейки) и двух заострённых палочек, связанных на одном конце (циркуля). Такое ограничение в выборе инструментов историки связывают с древнегреческой традицией, согласно которой прямую и окружность считали самыми гармоничными фигурами. Так, в своей книге «Начала» великий учёный Евклид описывал построения геометрических фигур, выполненные лишь циркулем и линейкой.

Существует много задач на построение. С некоторыми из них вы уже успели познакомиться. Однако есть три задачи на построение, которые сыграли в развитии математики особую роль. Эти задачи стали знаменитыми.

Задача о квадратуре круга. Построить квадрат, площадь которого равна площади данного круга.

Задача о трисекции угла (от латинских *tri* — «три» и *section* — «разрезание»). Разделить угол на три равные части.

Задача об удвоении куба. Построить куб, объём которого в 2 раза больше объёма данного куба.

Эти задачи занимали умы людей на протяжении тысячелетий. Их пытались решить и такие выдающиеся учёные древности, как Гиппократ Хиосский, Евдокс Книдский, Евклид, Эратосфен, Аполлоний Пергский, Герон, Папп, Платон, Архимед, и гении Нового времени — Рене Декарт, Франсуа Виет, Исаак Ньютон. И лишь в середине XIX века была доказана их неразрешимость, т. е. невозможность выполнить указанные построения с использованием лишь циркуля и линейки. Этот результат был получен средствами не геометрии, а алгебры, благодаря переводу этих задач на язык уравнений.

Об этих трёх знаменитых задачах вы сможете узнать больше, если примете участие в работе над проектом «Три знаменитые задачи древности — трисекция угла, квадратура круга, удвоение куба» (см. с. 191).

Когда вы решали задачи на построение, особенно те, которые отмечены знаком , вы, по-видимому, испытали сложности, связанные с ограниченностью арсенала инструментов. Поэтому предложение ещё больше сузить возможности применяемых приборов может показаться по меньшей мере неожиданным. Однако ещё в X в. персидский математик Мохаммед Абу-ль-Вефа описал решение целого ряда задач на построение с помощью линейки и циркуля, раствор которого нельзя менять. Совсем удивительной является теорема, опубликованная в 1797 г. итальянским математиком Лоренцо Маскерони (1750—1800): *любое построение, выполнимое циркулем и линейкой, можно проделать одним циркулем*. При этом Маскерони обусловливал следующее: поскольку самим циркулем провести прямую нельзя, то прямая считается построенной, если построены какие-нибудь две её точки.

В XX в. была обнаружена книга датского учёного Георга Мора (1640—1697), в которой он также описал построения одним циркулем. Поэтому сформулированную выше теорему называют теоремой Мора—Маскерони.

Геометрическое место точек (ГМТ)

Геометрическим местом точек (ГМТ) называют множество всех точек, обладающих определённым свойством.

Серединный перпендикуляр отрезка как ГМТ

Серединный перпендикуляр отрезка является геометрическим местом точек, равноудалённых от концов этого отрезка.

Биссектриса угла как ГМТ

Биссектриса угла является геометрическим местом точек, принадлежащих углу и равноудалённых от его сторон.

Окружность

Окружностью называют геометрическое место точек, расстояния от которых до заданной точки равны данному положительному числу.

Круг

Кру́гом называют геометрическое место точек, расстояния от которых до заданной точки не больше данного положительного числа.

Хорда окружности

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называют хордой окружности.

Диаметр окружности

Хорду, проходящую через центр окружности, называют диаметром.

Свойства окружности

Диаметр окружности, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам.

Диаметр окружности, делящий хорду, отличную от диаметра, пополам, перпендикулярен этой хорде.

Касательная к окружности

Прямую, имеющую с окружностью только одну общую точку, называют касательной к окружности.

Свойство касательной

Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания.

Признаки касательной к окружности

Если прямая, проходящая через точку окружности, перпендикулярна радиусу, проведённому в эту точку, то эта прямая является касательной к данной окружности.

Если расстояние от центра окружности до некоторой прямой равно радиусу окружности, то эта прямая является касательной к данной окружности.

Свойство касательных, проведённых к окружности через одну точку

Если через данную точку к окружности проведены две касательные, то отрезки касательных, соединяющие данную точку с точками касания, равны.

Окружность, описанная около треугольника

Окружность называют описанной около треугольника, если она проходит через все его вершины.

Около любого треугольника можно описать окружность.

Центр окружности, описанной около треугольника

Центр окружности, описанной около треугольника, — это точка пересечения серединных перпендикуляров сторон треугольника.

Окружность, вписанная в треугольник

Окружность называют вписанной в треугольник, если она касается всех его сторон.

В любой треугольник можно вписать окружность.

Центр окружности, вписанной в треугольник

Центр окружности, вписанной в треугольник, — это точка пересечения биссектрис треугольника.

Дружим с компьютером

Изучая математику в 5 и 6 классах, вы уже пользовались компьютером и оценили, каким надёжным помощником он может быть. Поможет он и в изучении геометрии.

Геометрия изучает фигуры: отрезки, треугольники, прямоугольники, прямоугольные параллелепипеды, шары и т. п. Поэтому полезно научиться пользоваться **графическим редактором**, с помощью которого можно работать с геометрическими фигурами и строить чертежи. Примерами таких редакторов могут быть *CorelDRAW*, Microsoft *Visio* и т. п. Выберите вместе с учителем графический редактор для выполнения рисунков к заданиям этого раздела. Кроме этих заданий, можно с помощью этого графического редактора иллюстрировать задачи, которые вы решаете. А если вы захотите сделать доклад или интересное сообщение для товарищей, то сможете с помощью **программ для построения презентаций** (например, Microsoft *PowerPoint*) создать даже мультфильм из «жизни» геометрических фигур.

Существует много программ, созданных специально для школьников и предназначенных помочь им в изучении математики: мультимедийные образовательные программы, программы для выполнения геометрических построений. Вы найдёте их в сети Интернет. А может, по мере приобретения знаний и умений вы и сами будете разрабатывать полезные программы для изучения геометрии.

Приведённые ниже задания вы сможете выполнять с помощью компьютера по мере изучения соответствующих тем. Бóльшая их часть — задания на построение геометрических фигур, которые вы будете выполнять с помощью выбранного графического редактора.

Точки и прямые

1. Вы знаете, что в геометрии точка размеров не имеет. Поэтому при графических построениях приходится изображать точки условно, маленькими кружочками (см. рисунки к § 1) или отдельными пикселями на экране. Аналогично прямая, изображённая на экране, будет иметь толщину (в отличие от прямых, рассматриваемых в геометрии).

Освойте в графическом редакторе инструменты для изображения точек и прямых, научитесь проводить прямую через две точки.

2. Освойте инструмент, позволяющий подписывать точки и прямые прописными и строчными буквами латинского алфавита.

Отрезок и его длина

3. Изобразите две точки, постройте отрезок, концами которого являются две заданные точки.

4. Найдите, каким образом графический редактор указывает длину отрезка.

5. Постройте отрезок заданной длины.

6. Найдите инструмент, с помощью которого можно перемещать и поворачивать фигуры.

7. Постройте два отрезка одинаковой длины и совместите их наложением.

8. Постройте чертёж, иллюстрирующий основное свойство длины отрезка. Проверьте, выполняется ли это свойство, определив длины построенных отрезков.

9. Есть ли в выбранном вами графическом редакторе средство для нахождения середины отрезка?

Луч. Угол

10. Постройте несколько различных углов. Найдите инструмент, с помощью которого можно определять величину угла и строить углы заданной величины.

11. Постройте чертёж, иллюстрирующий основное свойство величины угла. Проверьте, выполняется ли это свойство, определив величины построенных углов.

12. Найдите инструмент, который позволяет рисовать дуги. Нарисуйте несколько углов и обозначьте равные углы одинаковым количеством дуг. Обратите внимание на то, что на рисунках основные и вспомогательные линии имеют разную толщину. Найдите инструмент, позволяющий выбирать толщину линии.

13. Изобразите смежные и вертикальные углы.

Перпендикулярные прямые

14. Найдите в графическом редакторе инструмент, предназначенный для построения перпендикулярных прямых. Постройте с помощью этого инструмента прямой угол.

15. Нарисуйте прямую и точку, лежащую на данной прямой. Проведите через эту точку прямую, перпендикулярную данной.

16. Нарисуйте прямую и точку, не лежащую на данной прямой. Проведите через эту точку прямую, перпендикулярную данной.

Треугольник. Высота, медиана, биссектриса треугольника

17. Чтобы изобразить треугольник, обычно рисуют три отрезка, представляющие собой его стороны. Нарисуйте эти три отрезка. Найдите инструмент, который позволяет «склеить» эти отрезки и далее рассматривать их как единую фигуру — треугольник.

18. Нарисуйте остроугольный, прямоугольный и тупоугольный треугольники.

19. Найдите инструмент, который позволяет копировать уже нарисованную фигуру, и инструмент, который позволяет перемещать и поворачивать фигуры. С помощью этих инструментов изобразите несколько равных треугольников.

20. Постройте произвольный треугольник и из каждой его вершины проведите высоту, медиану, биссектрису. Какие инструменты вы используете для того, чтобы построение было точным? Выполните такое построение для остроугольного, прямоугольного, тупоугольного треугольников.

Равнобедренный треугольник

21. Постройте равнобедренный и равносторонний треугольники. Какие возможности графического редактора облегчат построение?

22. Как можно использовать теорему 10.3 для построения равнобедренного треугольника?

Признаки равенства треугольников

23. Постройте два треугольника, у которых две стороны и угол между ними соответственно равны. Как продемонстрировать, что построенные треугольники равны?

24. Нарисуйте отрезок и постройте его серединный перпендикуляр.

25. Постройте два треугольника, у которых сторона и два прилежащих к ней угла соответственно равны. Как продемонстрировать, что построенные треугольники равны?

26. Выполните рисунок, иллюстрирующий свойство серединного перпендикуляра. Выберите на серединном перпендикуляре несколько точек. С помощью какого инструмента можно проверить, что эти точки равноудалены от концов отрезка?

Параллельные прямые

27. Выполняя предыдущие задания, вы освоили инструменты, позволяющие копировать и перемещать уже построенные фигуры. Как с помощью этих инструментов построить параллельные прямые?

28. Придумайте, как строить параллельные прямые, используя теорему 13.1.

29. Нарисуйте прямую и точку, ей не принадлежащую. Проведите через эту точку прямую, параллельную данной. Увеличьте полученный рисунок. Может ли этот рисунок убедительно проиллюстрировать аксиому параллельности прямых? Почему?

Этот пример показывает, что все геометрические построения, которые мы можем выполнить либо на бумаге, либо с помощью компьютера, достаточно условны. Поэтому, даже сделав прекрасный рисунок, надо полагаться не на него, а на математические факты и доказательства.

30. Постройте несколько пар параллельных прямых. Как, используя инструменты графического редактора, показать, что построенные прямые действительно параллельны?

31. Сделайте несколько рисунков, иллюстрирующих свойства параллельных прямых. С помощью инструментов графического редактора покажите, что эти свойства выполняются.

32. Нарисуйте две параллельные прямые. Как определить расстояние между ними?

Сумма углов треугольника

33. Нарисуйте произвольный треугольник. Постройте все его внешние углы. Пользуясь средствами графического редактора, найдите величины всех построенных углов.

Прямоугольный треугольник

34. Нарисуйте прямоугольный треугольник и отметьте его прямой угол «уголком» с использованием тонких линий (см. рис. 18.1).

35. Постройте пары треугольников, иллюстрирующие признаки равенства прямоугольных треугольников. Отметьте на рисунке равные стороны одинаковым количеством чёрточек, а равные углы — одинаковым количеством дуг.

36. Постройте прямоугольный треугольник, острый угол которого равен 30°. Проверьте, выполняются ли для него утверждения ключевых задач 1 и 3 параграфа 19.

Окружность и круг

37. Освойте инструмент для рисования окружностей и кругов. Чем отличаются изображения окружности и круга? Какой инструмент нужен, чтобы из изображения окружности сделать изображение круга?

38. Нарисуйте окружность, проведите её хорду и диаметр. Какой элемент изображения окружности нужен, чтобы точно провести диаметр?

39. Нарисуйте окружность и отметьте на ней точку. Какие инструменты надо использовать, чтобы провести касательную к окружности в этой точке?

Описанная и вписанная окружности треугольника

40. Нарисуйте произвольный треугольник. Постройте его вписанную и описанную окружности, не пользуясь теоретическим материалом § 22. Теперь постройте эти же окружности, пользуясь следствиями 2 из теорем 22.1 и 22.2. Получилось ли это построение более быстрым и точным?

Задачи на построение

41. В задачах на построение используют циркуль и линейку. Если вы хотите выполнить построение с помощью графического редактора, то какие его инструменты можно использовать вместо циркуля и линейки?

42. Освойте инструмент, позволяющий изображать различные геометрические фигуры различными цветами.

43. Есть ли в выбранном вами графическом редакторе инструмент, позволяющий автоматически находить пересечение нарисованных геометрических фигур?

Проектная работа

Эта рубрика адресована прежде всего тем, кто хочет научиться приобретать знания самостоятельно, творчески мыслить, формировать, выражать и отстаивать свою точку зрения, выдвигать гипотезы, находить наиболее рациональные и нестандартные решения.

Первым шагом, который может помочь в реализации этих целей, является участие в проектной работе.

Проект — это самостоятельное исследование по выбранной теме, которое можно выполнять как индивидуально, так и в группе.

Дадим несколько советов по организации работы над проектом и оформлению результатов исследования.

1. При выборе темы необходимо учитывать её актуальность, наличие источников информации в литературе и интернет-ресурсов. Здесь важно ваше желание проявить себя в качестве исследователя в работе именно над выбранной темой.

2. Работу начинают с составления предварительного плана, в котором отражается замысел и этапы реализации задуманного. После знакомства с основными источниками и литературой при помощи руководителя проекта составляют окончательный план.

3. Важно чётко сформулировать цели исследования. Они могут быть записаны в такой форме: изучить, описать, проанализировать, доказать, сравнить и т. п.

4. Работа завершается подведением итогов исследования, делаются выводы, намечаются перспективы дальнейшего изучения темы.

5. Примерный объём работы — 10—15 страниц. Дополнительно может прилагаться иллюстративный материал.

6. Работа может быть оформлена в виде реферата, доклада, компьютерной презентации.

Ниже приводится рекомендуемый список тем, которые могут быть выбраны для проектной работы.

1. Геометрия вокруг нас

Рекомендуемая литература

1. *Депман И. Я., Виленкин Н. Я.* За страницами учебника математики: пособие для учащихся 5—6 классов средней школы. — М.: Просвещение, 1989.

2. *Шарыгин И. Ф., Ерганжиева Л. Н.* Наглядная геометрия: учебное пособие для учащихся 5—6 классов. — М.: Дрофа, 2002.

3. Энциклопедический словарь юного натуралиста / сост. А. Г. Рогожкин. — М.: Педагогика, 1981.

4. Энциклопедия для детей. Математика. — М.: Аванта +, 2003. Т. 11.

2. Ножницы в руках геометра

Рекомендуемая литература

1. *Байиф Ж.-К.* Логические задачи. — М.: Мир, 1983.

2. *Гарднер М.* Математические головоломки и развлечения. — М.: Мир, 1999.

3. *Данилов Ю.* Головоломки художника Громова // Квант. — 1977. — № 2.

4. *Данилов Ю.* Стомахион // Квант. — 1978. — № 8.

5. *Екимова М. А., Кукин Г. П.* Задачи на разрезание. — М.: МЦНМО, 2002.

6. *Савин Л.* Задачи на разрезание // Квант. — 1987. — 7.

3. Геометрия и искусство

Рекомендуемая литература

1. *Пидоу Д.* Геометрия и искусство. — М.: Мир, 1979.

2. Энциклопедия для детей. Математика. — М.: Аванта +, 2003. Т. 11.

4. Евклид и его великая книга «Начала»

Рекомендуемая литература

1. *Глейзер Г. И.* История математики в школе: VII—VIII кл. — М.: Просвещение, 1982.

2. Энциклопедия для детей. Математика. — М.: Аванта +, 2003. Т. 11.

5. Геометрия — одна из самых древних наук

Рекомендуемая литература

1. *Глейзер Г. И.* История математики в школе: VII—VIII кл. — М.: Просвещение, 1982.

2. История математики / под редакцией А. П. Юшкевича. — М.: Наука, 1970.

3. Энциклопедия для детей. Математика. — М.: Аванта +, 2003. Т. 11.

6. Три знаменитые задачи древности — трисекция угла, квадратура круга, удвоение куба

Рекомендуемая литература

1. *Прасолов В. В.* Три классические задачи на построение: удвоение куба, трисекция угла, квадратура круга. — М.: Наука, 1992.

2. Энциклопедия для детей. Математика. — М. : Аванта +, 2003. Т. 11.

7. Одна задача — два решения

Рекомендуемая литература

1. *Понарин Я. П.* Задача одна — решений много // Математика в школе. — 1992. — № 1.

2. *Готман Э. Г., Скопец З. А.* Задача одна — решения разные. — Киев: Радянська школа, 1983.

8. Метод ГМТ в задачах на построение

Рекомендуемая литература

Блинков А. Д., Блинков Ю. А. Геометрические задачи на построение. — М.: МЦНМО, 2010.

9. Построения на местности с помощью специальных приборов и инструментов

Рекомендуемая литература

1. *Антимонов Н. А.* Школьные походы по изучению рек, озёр и болот родного края. — М.: Учпедгиз, 1963.

2. *Ганьшин В. Н.* Простейшие измерения на местности. — М.: Недра, 1983.
3. Математическая составляющая / Ред.-сост. Н. Н. Андреев, С. П. Коновалов, Н. М. Панюнин. — М.: Фонд «Математические этюды», 2015.
4. *Перельман Я. И.* Живой учебник геометрии. — М.: АСТ: Астрель, 2009.
5. *Уилсон Н.* Руководство по ориентированию на местности. Выбор маршрута и планирование путешествия. Навигация с помощью карт, компаса и природных объектов. — М.: ФАИРПРЕСС, 2004.

10. Возникновение геометрии как науки и основные этапы её развития

Рекомендуемая литература

1. *Александрова Н. В.* История математических терминов, понятий, обозначений: словарь-справочник. — М.: Издательство ЛКИ, 2008.
2. *Болгарский Б. В.* Очерки по истории математики. — М.: Высш. школа, 1979.
3. *Глейзер Г. И.* История математики в школе: IV—VI классы. — М.: Просвещение, 1981.
4. *Глейзер Г. И.* История математики в школе: VII—VIII классы. — М.: Просвещение, 1982.
5. *Даан Дальмедико А.* и др. Пути и лабиринты. Очерки по истории математики. — М.: Мир, 1986.
6. *Малаховский В. С.* Избранные главы истории математики. — Калининград: Янтарный сказ, 2002.
7. *Мацуо Комацу.* Многообразие геометрии. — М.: Знание, 1981.
8. *Млодинов Л.* Евклидово окно. История геометрии от параллельных прямых до гиперпространства. — М.: Гаятри/Livebook, 2014.
9. Наука. Величайшие теории: вып. 14: Трёхмерный мир. Евклид. Геометрия. — М.: Де Агостини, 2015.

Глава 1. **1.14.** 1 точка, или 4 точки, или 6 точек. **1.15.** Наименьшее возможное количество точек пересечения — 1, наибольшее — 10. **1.16.** См. рисунок. **1.17.** 12 точек. **1.18.** См. рисунок. **1.19.** 4. *Указание*. На рисунке проведены 4 прямые и отмечены 5 точек, удовлетворяющих условию задачи. Покажите, что $n = 3$ не удовлетворяет условию

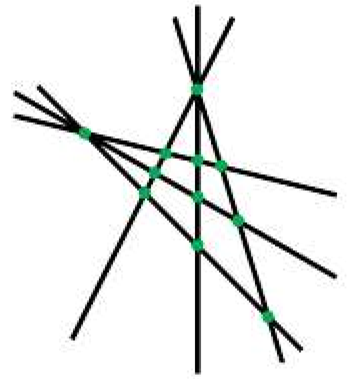


Рис. к задаче 1.16

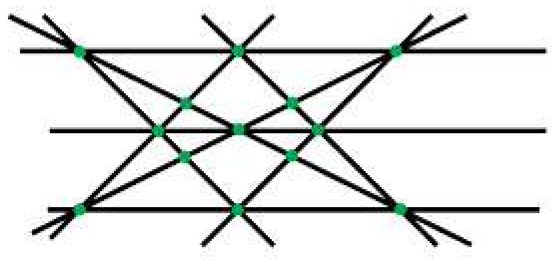


Рис. к задаче 1.18

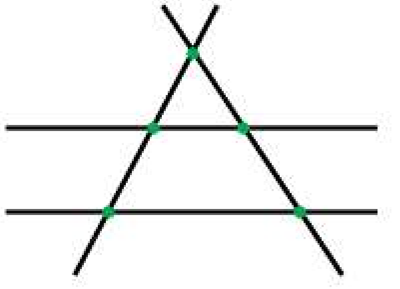


Рис. к задаче 1.19

задачи. **2.20.** 8 см или 56 см. **2.22.** 1) Все точки отрезка EF; 2) точки A и B (см. рисунок); 3) таких точек не существует. **2.23.** Таких точек две. Одна из них является такой внутренней точкой C отрезка AB, что $AC : BC = 1 : 2$, а вторая — такова, что точка A — середина отрезка BC. **2.24.** 4 см. **2.25.** 30 см. **2.26.** 22 см. **2.27.** Можно. **2.28.** Можно. **2.29.** Две точки прямой AB, удалённые от точки A на 1 см. **2.30.** Все точки отрезка BC. **2.31.** *а*) 4 точки; *б*) 3 точки; *в*) 4 точки; *г*) 3 точки. **2.34.** *Указание*. Воспользуйтесь равенством: 1) $13 - 2 \cdot 5 = 3$; 2) $3 \cdot 5 - 13 = 2$; 3) $2 \cdot 13 - 5 \cdot 5 = 1$. **2.35.** *Указание*. Воспользуйтесь равенством: 1) $2 \cdot 11 - 2 \cdot 7 = 8$; 2) $3 \cdot 11 - 4 \cdot 7 = 5$. **3.22.** 60°. **3.23.** 108°. **3.26.** 68°. **3.27.** 153°. **3.28.** 1) 6°; 2) 0,5°. **3.30.** 50° или 110°. **3.31.** 77° или 163°. **3.35.** 45°. *Указание*. Воспользуйтесь ключевой задачей 3.33. **3.36.** 45°, или 75°, или 125°. **3.37.** 30°, или 50°, или 90°. **3.41.** *Указание*. Отложите от произвольного луча данный угол последовательно 14 раз. Воспользуйтесь тем, что полученный таким образом угол на 2° больше развёрнутого угла. **3.42.** 36° или 45°. *Указание*. Рассмотрите два случая: когда сумма углов AOB, BOC и COD меньше 360° и больше 360°. **3.43.** 1) *Указание*. Воспользуйтесь тем, что $19° \cdot 19 = 361°$. **3.44.** Да. *Указание*. Предположите, что такого угла не существует, и получите противоречие. **3.45.** 65°, 10°, 15°. *Указание*.

Рис. к задаче 2.22

Докажите, что наименьший угол не может иметь общую сторону с прямым углом. **4.20.** $90°$. **4.21.** $180°$. **4.22.** $75°$. **4.23.** $108°$, $72°$. **4.24.** $136°$, $44°$. **4.28.** 1) Нет; 2) нет. **5.12.** 1) $124°$; 2) $98°$. **5.13.** $126°$. **5.18.** $70°$, $160°$. **5.19.** Если прямые a и b перпендикулярны. **5.20.** Существует. **5.21.** 1) *Указание*. $90° = 17° \cdot 5 + 5°$. **5.23.** Можно. *Указание*. $90° = 270° - 180°$. **5.24.** *Указание*. Основания перпендикуляров, опущенных из произвольной точки X угла MON на прямые OA и OB, принадлежат лучам, дополнительным к лучам OA и OB.

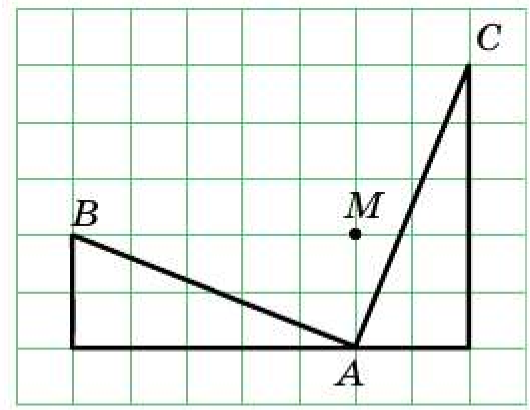


Рис. **к задаче 8.44**

Глава 2. **7.18.** 48 см. **7.19.** 13 см. **8.34.** 3 см. **8.35.** 10 см. **8.37.** 2) *Указание*. Докажите, что $\angle AOM = \angle BOK$. Угол AOB — развёрнутый. Тогда $\angle AOM + \angle MOB = 180°$. Отсюда $\angle MOB + \angle BOK = 180°$. **8.41.** *Указание*. Продлите медиану за точку, принадлежащую стороне треугольника, на отрезок, равный медиане. **8.42.** Нет. *Указание*. Рассмотрим острый угол M. На одной из сторон угла отметим точки B и C и проведём серединный перпендикуляр отрезка BC. Пусть A — точка пересечения этого перпендикуляра с другой стороной угла. Рассмотрите треугольники AMC и AMB. **8.43.** Нет. **8.44.** *Указание*. Отметьте точку M так, как показано на рисунке. **8.45.** *Указание*. На луче BM отметьте точку D так, чтобы $BM = MD$. Докажите, что треугольники BCN и DBC равны. **8.46.** *Указание*. На луче KM отметьте такую точку N, что $KM = MN$. Докажите равенство треугольников BNE и AKC. **8.48.** *Указание*. Проведите биссектрису угла BOC. **9.20.** Не следует. **9.30.** 4 см или 7 см. **9.31.** 4 см и 6 см или 5 см и 5 см. **9.33.** *Указание*. Пусть точка O — середина отрезков AB и CD. Тогда прямая EO — серединный перпендикуляр отрезка CD. **9.38.** 26 см или 14 см. **9.40.** *Указание*. Докажите, что треугольники ABM и CBN равны. **9.42.** $50°$ или $130°$. *Указание*. Рассмотрите три случая: точки M и N лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AB; точка N принадлежит треугольнику AMB; точка M принадлежит треугольнику ANB. **9.43.** 16 см или 4 см. **9.44.** *Указание*. Отметьте на стороне AC точку M так, чтобы $AB = AM$. **9.46.** *Указание*. Пусть точка E — середина отрезка MC. Докажите равенство треугольников AKM и DEM. **9.47.** *Указание*. Докажите, что треугольники BAK и BLC равны. **9.48.** 10 см. *Указание*. Докажите, что треугольники ABK и CED равны. **9.49.** *Указание*. На луче BM отложите отрезок MK, равный отрезку BM. Воспользуйтесь тем, что $\angle MBC = \angle MKA$ и $\angle MCB = \angle MAK$. **9.50.** *Указание*. На стороне AB отметьте точку E так, что $AK = AE$. Докажите, что треугольники ACK и ALE равны. **10.13.** *Указание*. Воспользовавшись тем, что если биссектриса треугольника является его высотой, то треугольник — равнобедренный, докажите, что треугольники MAD и KBD равнобедренные. **10.15.** *Указание*. Докажите, что треугольники ABK и BAM равны. **10.17.** Не могут. **10.18.** 8 см. **10.19.** 9 см. **10.20.** 2 см. *Указание*. Докажите, что треугольники KMC и KDA равнобедренные. **10.21.** $AB : AC = 1 : 2$. **10.23.** 10 см. *Указание*. Докажите, что отрезок KH — биссектриса треугольника BKC. **10.24.** *Указание*. Треугольники ACG и BEF (см. рисунок) равны по стороне и двум прилежащим углам.

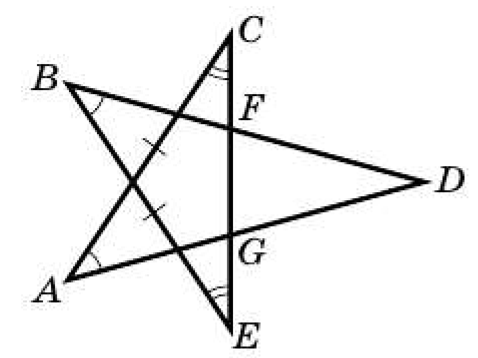


Рис. к задаче 10.24

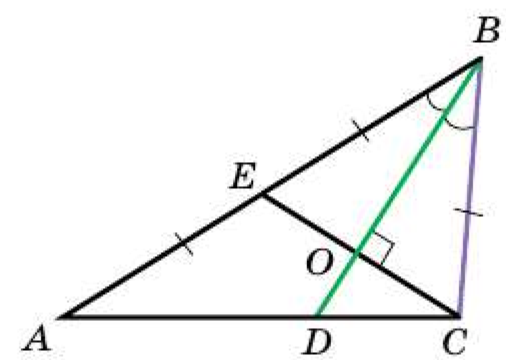


Рис. к задаче 10.25

Следовательно, $\angle AGC = \angle BFE$ и $AG = BF$. **10.25.** 2 см, 3 см, 4 см. *Указание*. Отрезок BD — биссектриса треугольника ABC (см. рисунок), отрезок CE — его медиана, $BD \perp CE$. Докажите, что треугольник CBE равнобедренный ($BC = BE$). Тогда $AB = 2BC$ и могут иметь место такие случаи: $AB - BC = 1$ см или $AB - BC = 2$ см, т. е. $BC = 1$ см или $BC = 2$ см. **10.26.** *Указание*. Пусть D и E — точки пересечения прямых BK и BM с прямой AC соответственно. Докажите, что треугольники DCB и EAB равны. **10.27.** *Указание*. На луче BD отметьте точку M так, чтобы $BD = DM$. Докажите, что треугольник MAE равнобедренный. **10.29.** *Указание*. На луче BM отметьте точку D так, чтобы $BM = MD$. Воспользуйтесь тем, что $\angle MBC = \angle MDA$ и $\angle MCB = \angle MAD$. **10.30.** *Указание*. Докажите, что треугольники ADB и DFC равны. **10.31.** *Указание*. Докажите, что треугольники AOB и OMC равны. Далее докажите, что треугольник OBM равнобедренный. **10.32.** *Указание*. Докажите, что треугольники AFC и DBF равны. **11.13.** Нет. *Указание*. Рассмотрите треугольники, изображённые на рисунке. **11.15.** *Указа-*

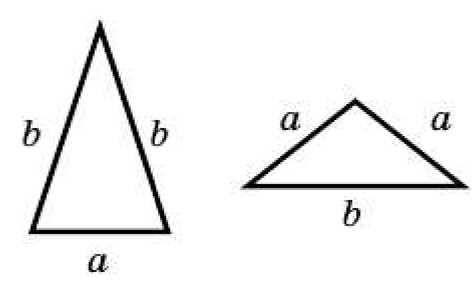


Рис. к задаче 11.13

ние. Докажите равенство треугольников APD и BPC. Далее воспользуйтесь ключевой задачей 8.25. **11.17.** *Указание*. Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — данные треугольники, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, отрезки AM и A_1M_1 — медианы треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно. На продолжениях отрезков AM и A_1M_1 за точки M и M_1 отложите соответственно отрезки MD и M_1D_1 такие, что $MD = AM$ и $M_1D_1 = A_1M_1$. Докажите, что $AC = BD$ и $A_1C_1 = B_1D_1$. Далее докажите равенство треугольников ABD и $A_1B_1D_1$, MBD и $M_1B_1D_1$ и, наконец, ABC и $A_1B_1C_1$. **Глава 3.** **13.9.** Бесконечно много. **13.11.** *Указание*. Предположим, что прямые a и b пересекаются. Выберем произвольную точку, принадлежащую прямой a, отличную от точки пересечения a и b. Через выбранную точку можно провести прямую, пересекающую прямую a и параллельную прямой b, что противоречит условию. **13.12.** *Указание*. Пусть прямая b не перпендикулярна прямой c. Тогда через произвольную точку M прямой b проведём прямую b_1 перпендикулярно прямой c. По теореме 13.1 устанавливаем, что $a \parallel b_1$. Получили, что через точку M проходят две прямые, параллельные прямой a. **13.13.** *Указание*. Воспользуйтесь результатом задачи 13.12. **13.14.** *Указание*. Проведите биссектрису угла B. **13.17.** *Указание*. Продлите отрезки AB и CD до пересечения. **14.18.** Нет. **14.21.** *Указание*. Докажите, что BKM равнобедренный. **14.22.** *Указание*. Докажите, что $BF \parallel AC$ и $BD \parallel AC$, и воспользуйтесь аксиомой параллельности прямых. **14.23.** *Указание*. Докажите, что $\angle BAP = \angle BQP$. **14.24.** *Указание*. Проведите луч CM так, что $\angle BCM = 30°$ и $\angle MCD = 40°$. **14.26.** *Указание*. Докажите, что $MO \parallel AC$ и $ON \parallel AC$. **15.16.** 40°. **15.20.** 40°, 70°, 70°. **15.21.** 121°. **15.28.** *Указание*. Проведите через точку C прямую, параллельную AB. **15.31.** *Указание*. Докажите, что треугольники AMO и CKO равнобедренные. **15.33.** *Указание*. На стороне AB отметьте точку K так, что $KD \parallel AC$. Докажите, что треугольники KBD и DAC равны. **15.34.** *Указание*. На стороне AB отметьте точку N так, что $ND \parallel AC$. Докажите, что треугольники NDM и CKD равны. **15.35.** *Указание*. На стороне AB отметьте точку K так, чтобы $MK \parallel AC$. Докажите, что треугольники BMK и MNC равны. **15.37.** *Указание*. На отрезке CE отметьте точку F так, что $DF \parallel AB$. Докажите, что треугольники DBC и DEF равны. **15.38.** *Указание*. На отрезке AC отметьте точку F так, что $NF \parallel AB$. Пусть D — точка пересечения прямых AB и NK. Докажите, что $NF = AD = AM$. Далее докажите, что треугольник DMN равнобедренный. **15.39.** 10 см. *Указание*. На луче ED отметьте точку F так, что $ED = DF$. Докажите, что треугольник AEF равнобедренный. **16.28.** 140°. **16.34.** 25°, 55°, 100°. **16.37.** 35°, 35°, 110°. **16.40.** *Указание*. Найдите углы треугольника ABC и докажите, что треугольники AMB и MAC равнобедренные. **16.41.** 36°, 72°, 72°. **16.42.** *Указание*. Примените метод доказательства от противного. **16.44.** Остроугольный. *Указание*. Рассмотрите по очереди каждый угол треугольника. Так как сумма двух других углов больше 90°, то рассматриваемый угол меньше 90°. Так как все углы меньше 90°, то треугольник — остроугольный. **16.45.** Нет. **16.48.** 90°. **16.49.** 130°. **16.50.** 50°. **16.51.** 90°. **16.52.** 90°. **16.53.** 36°, 72°, 72° или 90°, 45°, 45°.

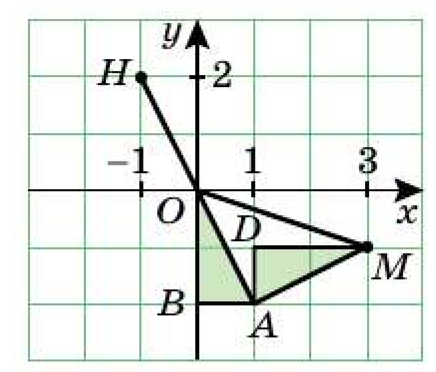


Рис. к задаче 16.74

16.54. $90° - \frac{\alpha}{2}$. **16.55.** $\left(\frac{540}{7}\right)^{\circ}$, $\left(\frac{540}{7}\right)^{\circ}$, $\left(\frac{180}{7}\right)^{\circ}$. **16.57.** 720°. **16.61.** 60°. *Указание*. Докажите, что треугольники ANQ и BPM равны, и покажите, что $\angle PMB = \angle QNA = 120°$. **16.62.** 55°. *Указание*. Докажите, что треугольники PAF и ECQ равны. **16.65.** *Указание*. На луче AD отметьте точки M и N так, что $AM = AB$ и $AN = AC$. Докажите, что треугольники BMD, DNC и ABC равны. **16.66.** *Указание*. На стороне BC отметьте точку K так, что $BK = CD$. **16.68.** 15°. *Указание*. На продолжении стороны AB за точку A отметьте точку K так, чтобы $AK = AC$. Воспользуйтесь тем, что треугольники AKC и KCB являются равнобедренными. **16.70.** 60°. *Указание*. На продолжении отрезка CD за точку D отметьте точку K такую, что $DK = DC$. **16.71.** *Указание*. На продолжениях сторон AC и A_1C_1 за точки A и A_1 отметьте соответственно точки K и K_1 так, что $AK = AB$ и $A_1K_1 = A_1B_1$. Воспользуйтесь равенством треугольников KBC и $K_1B_1C_1$. **16.74.** 135°. *Указание*. Отметим точку A (1; –2) (см. рисунок). Треугольники OBA и ADM равны по первому признаку равенства треугольников. Тогда $\angle AOB + \angle DAM = 90°$. Докажите, что треугольник OAM равнобедренный и прямоугольный. **16.75.** 120°. *Указание*. Треугольники AKB и BMP (см. рисунок) равны по первому признаку равенства треугольников. **16.76.** *Указание*. Лю-

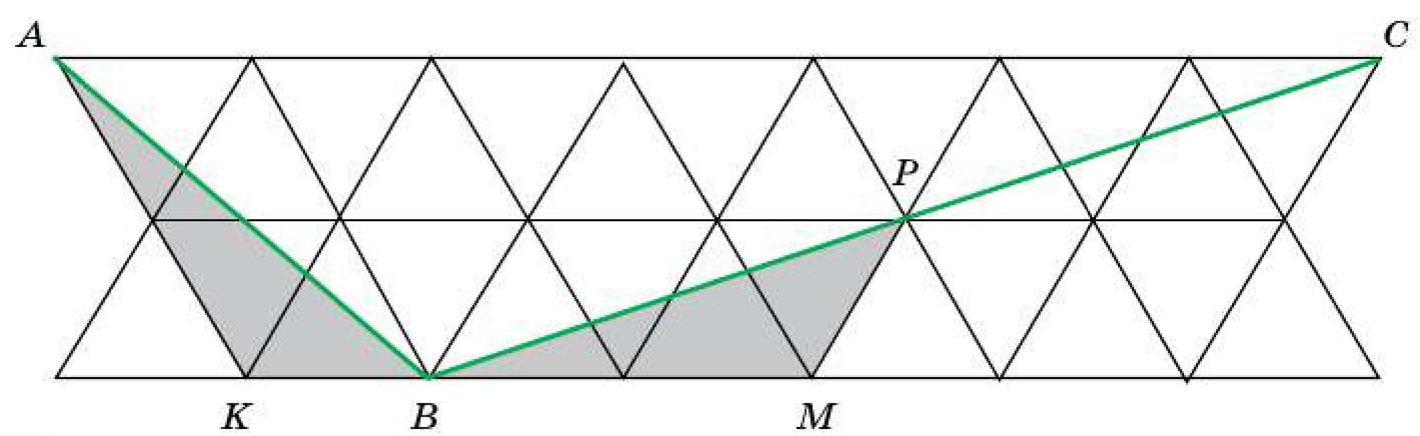


Рис. к задаче 16.75

бой отрезок, содержащийся в равностороннем треугольнике, меньше, чем его сторона. Две вершины исходного треугольника принадлежат одному из двух треугольников, которые его покрывают. А значит, сторона этого треугольника больше или равна стороне исходного. Таким образом, этого треугольника будет достаточно для покрытия исходного треугольника. **16.77.** 70°. *Указание*. Постройте равносторонний треугольник AMC так, чтобы точка M принадлежала треугольнику ABC, и докажите, что $\triangle AMB = \triangle CDB$. **17.10.** *Указание*. В треугольнике DAC угол DAC тупой. Следовательно, $DC > AC$. **17.14.** 20 см. **17.15.** 8 см. **17.16.** $AB > AC$. **17.17.** $\angle BAD > \angle CAD$. **17.21.** *Указание*. Отметьте на прямой m произвольную точку X и сравните сумму $AX + BX$ с длиной отрезка AB. **17.22.** 3 см. **17.23.** 6 см. **17.24.** 9 см. **17.25.** 9 см. **17.28.** *Указание*. Воспользуйтесь тем, что $\angle KAD < \angle BCD$. **17.29.** *Указание*. Воспользуйтесь тем, что в данном треугольнике против угла, величина которого равна 60°, не может лежать наибольшая сторона. **17.30.** *Указание*. Проведите медиану CM треугольника ABC. **17.31.** *Указание*. Продлите отрезок KE до пересечения с прямой AC. **17.32.** *Указание*. Пусть прямая AK пересекает прямую CB в точке M. Воспользуйтесь тем, что $CK + KM > CM$. **17.33.** *Указание*. На стороне AB отметьте точку M такую, что $KM \parallel AC$. Воспользуйтесь тем, что $KM = MA = KC$. **17.34.** *Указание*. На продолжении медианы AM за точку M отложите отрезок MD, равный этой медиане, и рассмотрите треугольник ABD. **17.37.** *Указание*. Докажите, что $BD > AD$. **17.38.** *Указание*. На стороне BC отметьте точку M так, что $\angle MAC = \angle MCA$. **17.39.** *Указание*. Докажите, что $AD > AC$. Тогда $AD + DC > AC + CD$. **17.40.** *Указание*. Постройте треугольники ABM и CBN, равные треугольнику ABC. Воспользуйтесь тем, что треугольник MBN равносторонний. **17.41.** *Указание*. На основании AC отметьте точку K так, что $CK = CE$. На луче BC отметьте точку T так, что $BC = CT$. Воспользуйтесь тем, что $BE + ET > BT$. **18.25.** *Указание*. Докажите равенство треугольников AKH и CMH. **18.26.** *Указание*. Докажите, что $\triangle MEN = \triangle NFM$. Отсюда следует, что $MK = NK$. Кроме того, $KE = FM = NE$. Значит, $MK = MN$. **18.27.** 45°. *Указание*. Докажите, что треугольники AHD и BCD равны. **18.29.** 45°. *Указание*. Докажите, что треугольники CMP и CNQ равнобедренные. **18.30.** 45°. *Указание*. Проведите высоту CD. Докажите, что треугольники CMK и CDK равны. **18.31.** Нет. **18.33.** *Указание*. Проведите высоту CH треугольника ABC. Докажите, что лучи CD и CE — биссектрисы соответственно углов MCH и HCF, а далее воспользуйтесь теоремой 18.2. **18.34.** *Указание*. Проведите высоту CH треугольника ABC. **18.35.** *Указание*. Из точки M опустите перпендикуляр MD на катет BC. Докажите, что треугольники NMD и KNC равны. **18.36.** *Указание*. Рассмотрим прямоугольные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ ($\angle C = \angle C_1 = 90°$), в которых $\angle B = \angle B_1$ и $AB + BC = A_1B_1 + B_1C_1$. На лучах CB и C_1B_1 соответственно отметим точки D и D_1 так, что $BD = AB$ и $B_1D_1 = A_1B_1$. Докажите, что треугольники ACD и $A_1C_1D_1$ равны. **19.11.** 30°, 1 см. **19.12.** 9 см. **19.13.** 15 см. **19.14.** Существует. **19.15.** Существует. **19.19.** 60°, 30°. **19.20.** 8 см. **19.21.** 6 см. *Указание*. Докажите, что треугольник ADB равнобедренный. **19.22.** *Указание*. Проведите высоту треугольника, ему принадлежащую. Далее воспользуйтесь ключевой задачей 3 § 19. **19.23.** *Указание*. Треугольник AA_1B_1 прямоугольный, поэтому в силу ключевой задачи 3 § 19 получаем, что $A_1C_1 = \frac{1}{2}AB$. Тогда $B_1C_1 = \frac{1}{2}AB$. Тогда в силу ключевой задачи 4 § 19 получаем, что $\angle AA_1B = 90°$. Таким образом, биссектриса BB_1 является высотой, а значит, и медианой треугольника ABC. **19.24.** 120°. *Указание*. Проведите медиану BE треугольника ABM. **19.25.** 90°, 40°, 50°. *Указание*. Рассмотрите треугольник DAK, где точка K — середина AB. **19.26.** 1 см. *Указание*. Проведите медиану DM треугольника ADC. Докажите, что $DM \parallel BC$. **19.28.** *Указание*. Рассмотрите отрезки FM и EM, а также отрезки FN и EN как медианы соответствующих прямоугольных треугольников. **19.29.** 3 см или 6 см. *Указание*. Отметьте точку M — середину отрезка AB. Рассмотрите два случая: точки C и D лежат в одной полуплоскости относительно прямой AB и в разных полуплоскостях. **19.30.** *Указание*. Проведите из вершины прямого угла медиану данного прямоугольного треугольника. **19.32.** 4 см. *Указание*. Проведите высоту CD треугольника ABC. **19.33.** 10 см. *Указание*. Пусть точка M — середина отрезка AC. Докажите, что треугольник BMD равносторонний. **19.34.** *Указание*. Пусть прямые AB и DC пересекаются в точке E. Тогда $\angle AED = 90°$. Воспользуйтесь тем, что $MN \geqslant EN - EM$. **19.35.** *Указание*. На стороне CA отметьте точку K так, что $CK = CB$. Тогда $\angle KBD = 90°$. **19.36.** *Указание*. Пусть M — середина отрезка BD. Тогда $BC + CD > 2CM$ (см. задачу 17.35) и $BD = 2AM$.

Глава 4. **20.16.** 1,5 см. **20.17.** 60 см. **20.18.** Окружность данного радиуса с центром в данной точке. **20.19.** Серединный перпендикуляр отрезка, соединяющего данные точки. **20.20.** Две прямые, состоящие из биссектрис четырёх углов, образованных при пересечении данных прямых. **20.21.** Все точки серединного перпендикуляра данного основания, кроме точки пересечения этого перпендикуляра с основанием. **20.22.** Прямая, являющаяся серединным перпендикуляром отрезка, который перпендикулярен данным прямым и концы которого принадлежат данным прямым. **20.23.** Пара параллельных прямых, каждая из которых удалена от данной прямой на данное расстояние. **20.24.** *Указание*. Искомое ГМТ состоит из шести точек. **20.26.** *Указание*. Воспользуйтесь ключевой задачей 4 § 19. **20.27.** Все точки полуплоскости, которая содержит точку B и границей которой является серединный перпендикуляр отрезка AB, за исключением границы этой полуплоскости. **20.28.** Все точки плоскости, не принадлежащие кругу с центром A и радиусом AB. **20.29.** Искомое ГМТ выделено на рисунке зелёным цветом, d — заданное расстояние. **20.30.** Искомое ГМТ выделено на рисунке зелёным цветом, d — заданное расстояние. **20.31.** Два вертикальных угла, один из которых — это угол ACB, за исключением точки C. **20.32.** 1) Угол ACB, за исключением точки C; 2) угол ACB, за исключением точек треугольника ABC, не принадлежащих стороне AB (см. ри-

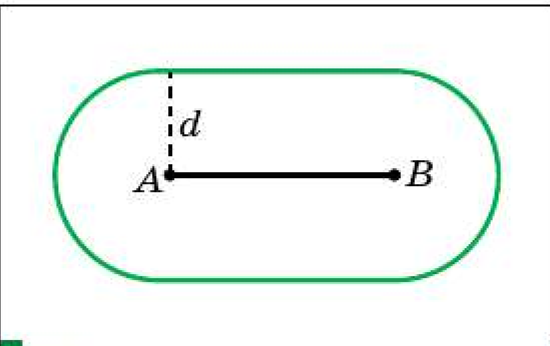


Рис. к задаче 20.29

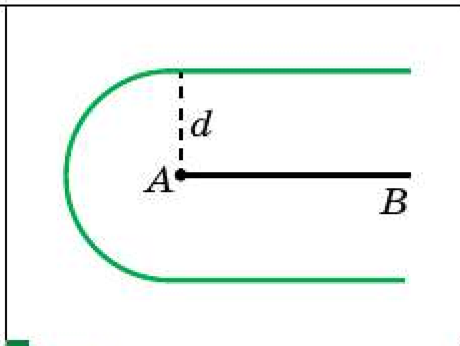


Рис. к задаче 20.30

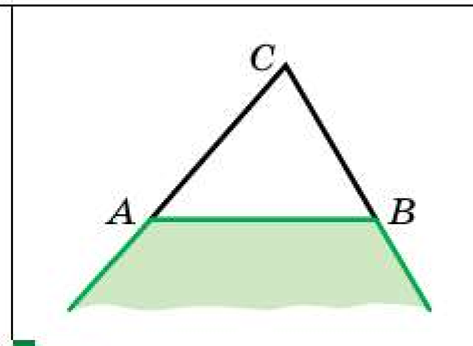


Рис. к задаче 20.32

сунок). **20.33.** Дуга окружности радиуса $\frac{d}{2}$ с центром в точке O, принадлежащая углу COD, без точек, лежащих на лучах OC и OD (см. рисунок). *Указание*. Воспользуйтесь ключевой задачей 3 § 19. **20.34.** Искомое ГМТ — это объединение таких фигур: серединного перпендикуляра отрезка AB и окружностей с центрами A и B радиусами, равными AB, за исключением точек, принадлежащих прямой AB (см. рисунок). **20.35.** Искомое ГМТ — это объединение центра данной окружности и окружности радиуса 2 см, центр которой совпадает с центром данной окружности. **20.36.** Угол, образованный серединными перпендикулярами отрезков AB и AC, содержащий точку A (см. рису-

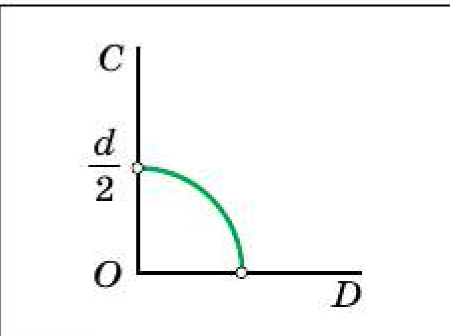


Рис. к задаче 20.33

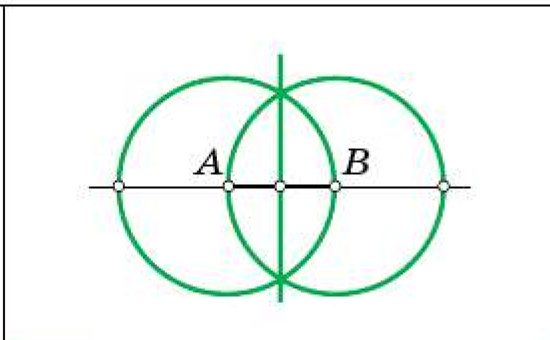


Рис. к задаче 20.34

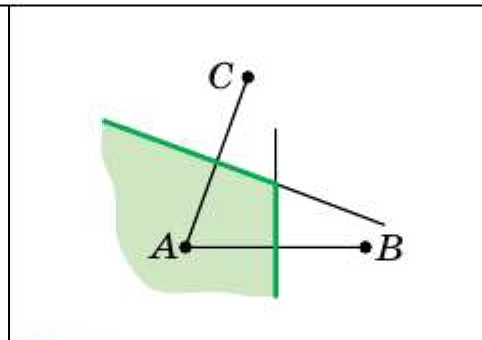


Рис. к задаче 20.36

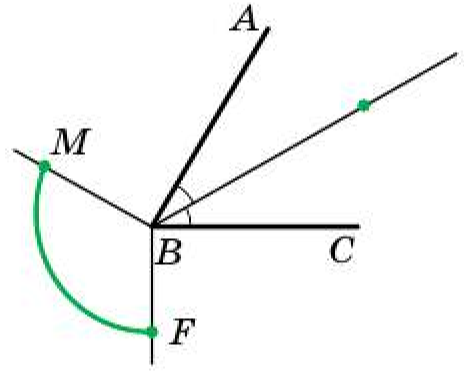


Рис. к задаче 20.37

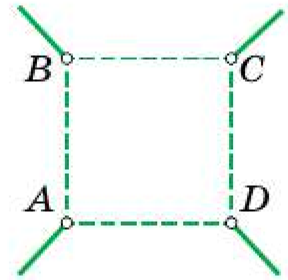


Рис. к задаче 20.38

нок). **20.37.** Искомое ГМТ — это объединение точки, принадлежащей биссектрисе угла ABC и удалённой от его вершины на 6 см, и дуги окружности радиуса 3 см с центром в точке B, содержащейся в угле MBF, где луч BM перпендикулярен лучу BA и луч BF перпендикулярен лучу BC (см. рисунок). **20.38.** Искомое ГМТ — это объединение прямых AC и BD и точек квадрата, за исключением его сторон (см. рисунок). **21.15.** 1) 90°; 2) 120°. **21.16.** 12 см. **21.18.** 40°. **21.19.** 120°. **21.24.** Все точки прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данной прямой, кроме данной точки. **21.25.** Все точки биссектрисы угла, за исключением вершины угла. **21.26.** Все точки плоскости, за исключением данной прямой. **21.27.** 1 см. **21.28.** 60°. *Указание*. Опустите перпендикуляр из центра окружности на хорду CD. **21.29.** 120°. **21.30.** *Указание*. Опустите из центра окружности перпендикуляры на хорды AB и CD. **21.31.** *Указание*. Рассмотрите треугольники POB и POD, где точка O — центр окружности. **21.32.** 5 см. *Указание*. Докажите, что центр окружности и середина отрезка MN находятся на одинаковом расстоянии от прямой CB. **21.34.** 3 : 1, считая от точки M. *Указание*. Докажите, что $\angle AOM = 60°$. **21.36.** *Указание*. Рассмотрев треугольник OAK, докажите, что $OK = 2AK$. **21.37.** *Указание*. Пусть точка F — середина хорды MB. Докажите, что прямая NF содержит диаметр окружности. Далее вычислите угол KNF. **22.19.** 24 см, 24 см, 20 см. **22.20.** 20 см, 14 см, 18 см. **22.21.** 50°, 55°, 75°. **22.22.** 45°. **22.26.** *Указание*. Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC (см. рисунок). Тогда $\angle BAO = \angle 1$ и $\angle BCO = \angle 2$. Имеем: $\angle 1 < \angle BAC$ и $\angle 2 < \angle BCA$. Отсюда $2\angle 1 + 2\angle 2 < 180°$. Тогда $\angle ABC < 90°$. Аналогично доказываем, что два других угла

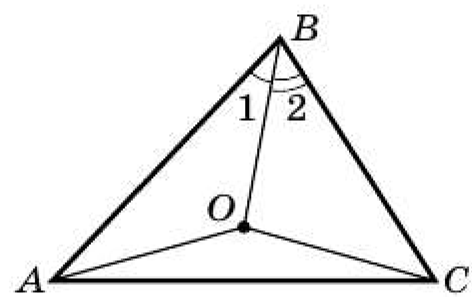


Рис. к задаче 22.26

треугольника тоже острые. **22.28.** *Указание.* Воспользуйтесь методом доказательства от противного и с помощью ключевых задач 22.26, 22.27 получите противоречие. **22.29.** *Указание.* Воспользуйтесь ключевой задачей § 22. **22.32.** *Указание.* Проведите серединные перпендикуляры отрезков AC и AM. **22.33.** 72°, 72°, 36°. **22.35.** *Указание.* Воспользуйтесь свойством касательных, проведённых к окружности через одну точку. **22.36.** 11 см. *Указание.* Докажите, что $MN = BM + AN$. **22.37.** *Указание.* Проведите биссектрису угла A треугольника ABC. **22.38.** 0,5 см. *Указание.* Пусть M_1 и M_2 — точки касания окружностей, вписанных соответственно в треугольники ABD и DBC. Для отрезков DM_1 и DM_2 воспользуйтесь результатом задачи 22.35. **22.39.** 4 см. **22.40.** *Указание.* Воспользуйтесь тем, что биссектрисы треугольника, в частности треугольника AMC, пересекаются в одной точке. **22.41.** 36°, 36°, 108°. *Указание.* Воспользуйтесь тем, что треугольники FAO и BOA равнобедренные. **22.42.** *Указание.* Докажите, что треугольники PCF и QCE равны. **22.43.** *Указание.* Воспользуйтесь тем, что треугольники ACM и BCK равнобедренные. **22.44.** *Указание.* Отметьте на разных сторонах угла точки M и N. Проведите биссектрисы углов BMN и BNM. Далее отметьте на разных сторонах угла точки E и F. Проведите биссектрисы углов BEF и BFE. **22.45.** *Указание.* Докажите, что прямая AO является серединным перпендикуляром отрезка C_1B_1. **22.46.** 90°. *Указание.* Воспользуйтесь результатом задачи 22.22. **22.47.** *Указание.* Пусть M, N и K — точки касания вписанной окружности со сторонами AB, BC и CA соответственно. Докажите, что $A_1A_2 = AM + AK$, $B_1B_2 = BM + BN$, $C_1C_2 = CK + CN$. **22.48.** *Указание.* Пусть окружность, вписанная в треугольник AXB, касается отрезка AB в точке K. В силу ключевой задачи 22.35 $AK = \frac{AB + d}{2}$. Это означает, что центр вписанной окружности принадлежит прямой, перпендикулярной отрезку AB и проходящей через точку K. **23.3.** 70°. **23.10.** $\frac{a + b + c}{2}$. **23.12.** a. **23.13.** 18 см. **23.14.** 16 см. **23.17.** *Указание.* Пусть биссектриса угла B пересекает данную окружность с центром O в точке M. Имеем: $OM = OC$ и $\angle OCB = 90°$. Докажите, что луч CM — биссектриса внешнего угла при вершине C треугольника ABC. **23.18.** 120°. **23.19.** *Указание.* Докажите, что луч BC — биссектриса внешнего угла треугольника ABD. **23.20.** 45°. *Указание.* Докажите, что точка B — центр вневписанной окружности треугольника QPD. **23.21.** 45°. *Указание.* Докажите, что точка A — центр вневписанной окружности треугольника MNC. **23.22.** 30°. *Указание.* Докажите, что точка A — центр вневписанной окружности треугольника KBN.

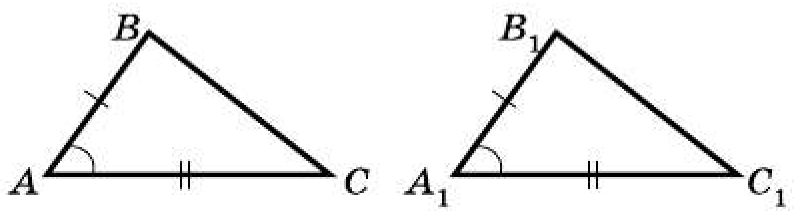
23.23. 45°. *Указание.* Проведите окружность с центром в точке D и радиусом 1 см. Эта окружность касается прямых AB и CD. Предположим, что она не касается PQ. Тогда проведём касательную к этой окружности параллельно прямой PQ. Пусть P_1 и Q_1 — точки пересечения этой прямой соответственно со сторонами AB и BC квадрата. В силу ключевой задачи § 23 периметр треугольника P_1BQ_1 равен 2 см. Получили противоречие. Следовательно, построенная окружность является вневписанной для треугольника PBQ. **23.24.** *Указание.* Проведите биссектрису внешнего угла при вершине B треугольника ABC. Докажите, что центр вневписанной окружности треугольника ABD лежит на продолжении отрезка AE за точку E. **23.25.** 80°. *Указание.* На продолжении отрезка BM за точку M отметьте точку K так, что $BM = MK$. Докажите, что $BE \parallel AK$. Далее воспользуйтесь результатом задачи 15.18. **23.26.** 10°. *Указание.* Продлите сторону CB за точку B. Докажите, что точка E — центр вневписанной окружности треугольника BDC. **23.27.** 45°. *Указание.* Докажите, что точка E — центр вневписанной окружности треугольника ABD. **23.28.** *Указание.* Пусть $\angle BAD = 2\alpha$. Покажите, что $\angle DBE = \alpha + 45°$. Покажите, что внешний угол треугольника ABC при вершине B также равен $\alpha + 45°$. **23.29.** 45°. *Указание.* Пусть E — точка пересечения серединного перпендикуляра стороны AB треугольника ABC с лучом AC. Докажите, что точка C — центр вневписанной окружности треугольника AEB. **24.22.** *Указание.* Проведите через данную точку, лежащую на стороне угла, перпендикуляр к другой стороне угла. **24.24.** 1) *Указание.* Постройте прямоугольный треугольник, в котором гипотенуза равна данной биссектрисе, а острый угол равен половине данного угла. **24.26.** *Указание.* Постройте прямоугольный треугольник, в котором один из катетов равен половине данного основания, а другой — радиусу окружности. **24.29.** *Указание.* Постройте прямоугольный треугольник по катету, равному данной высоте, и противолежащему острому углу, равному данному. **24.31.** *Указание.* Постройте прямоугольный треугольник, в котором гипотенуза равна данной стороне, а катет — данной высоте. **24.39.** *Указание.* Постройте прямоугольный треугольник, один из катетов которого равен разности длины катета и радиуса, а другой — радиусу. Тогда угол, противолежащий другому катету, равен половине острого угла искомого треугольника. **24.42.** *Указание.* Постройте окружность, проходящую через три заданные точки. **24.43.** *Указание.* Воспользуйтесь результатом задачи 23.6. **25.10.** *Указание.* Искомая точка принадлежит ГМТ, удалённых на расстояние AB от прямой n. Это ГМТ — пара прямых, параллельных прямой n. Каждая из точек пересечения этих прямых с прямой m удовлетворяет условию. Задача имеет два решения.

25.17. *Указание.* Проведите отрезок, перпендикулярный двум данным параллельным прямым, концы A и B которого принадлежат этим прямым. Тогда центр искомой окружности принадлежит двум ГМТ: первому — равноудалённых от точек A и B и второму — удалённых от данной в условии точки на расстояние $\frac{1}{2}AB$. **25.18.** *Указание.* Геометрическим местом центров окружностей, касающихся данной прямой в данной точке B, является прямая, перпендикулярная данной и проходящая через эту точку (данная точка B не принадлежит ГМТ). Геометрическим местом центров окружностей, проходящих через точки A и B, является серединный перпендикуляр отрезка AB. **25.24.** *Указание.* Постройте прямоугольный треугольник BCD, в котором катет BC равен данному катету, а катет DC — сумме гипотенузы и другого катета. Тогда вершина A искомого треугольника ABC принадлежит серединному перпендикуляру отрезка BD. **25.25.** *Указание.* Постройте треугольник ADB, в котором $\angle D = 45°$, сторона DB равна сумме данных катетов, сторона AB — данной гипотенузе. **25.26.** *Указание.* Постройте треугольник ADB, в котором $\angle D = 135°$, сторона DB равна разности данных катетов, сторона AB — данной гипотенузе. **25.27.** *Указание.* Постройте треугольник DBC, в котором $\angle C = 90°$, катет CB равен данному катету, катет CD — разности гипотенузы и другого катета. Тогда искомая вершина A лежит на серединном перпендикуляре отрезка DB. **25.29.** *Указание.* Постройте треугольник ADC, в котором сторона AC равна данной, сторона DC — сумме двух других сторон, угол DCA — данному углу. **25.30.** *Указание.* Постройте треугольник ADC по данной стороне AC, данному углу C и стороне DC, равной данной разности сторон. Вершина B искомого треугольника ABC лежит на серединном перпендикуляре отрезка AD. Описанное построение применимо к случаю, когда заданный угол C прилежит к большей из двух неизвестных сторон. **25.31.** *Указание.* Постройте треугольник ADC, в котором $\angle D = 90° + \frac{\beta}{2}$, где β — данный угол, сторона AC равна данной стороне, сторона AD — данной разности сторон. Тогда искомая вершина B лежит на серединном перпендикуляре отрезка DC. **25.32.** *Указание.* Постройте треугольник ADC, в котором $\angle D = \frac{\beta}{2}$, где β — данный угол, сторона AC равна данной стороне, сторона AD — данной сумме сторон. Тогда искомая вершина B лежит на серединном перпендикуляре отрезка DC. **25.33.** *Указание.* Постройте треугольник ADC, в котором AC — данная сторона, отрезок DC равен сумме неизвестных сторон, $\angle DAC = 90° + \alpha$, где α — половина разности углов, о которой говорится в условии. **25.35.** *Указание*. Постройте прямоугольный треугольник по катету, равному высоте, и противолежащему углу, равному данному. Гипотенуза этого треугольника — одна из сторон искомого. Теперь задача свелась к задаче 25.29. **25.36.** *Указание*. Постройте прямоугольный треугольник BDM, в котором гипотенуза BM равна данной медиане, катет BD — данной высоте. Тогда центр описанной окружности искомого треугольника лежит на прямой, перпендикулярной отрезку DM, проходящей через точку M. **25.37.** *Указание*. Постройте треугольник ABD, в котором стороны AB и AD равны двум данным сторонам, а сторона BD в 2 раза больше данной медианы. **25.38.** *Указание*. Постройте треугольник ADC, в котором AC — данная сторона, сторона AD в 2 раза больше данной медианы, а высота, проведённая из вершины D, равна данной высоте. Покажите, что сторона DC равна одной из неизвестных сторон искомого треугольника.

Алфавитно-предметный указатель

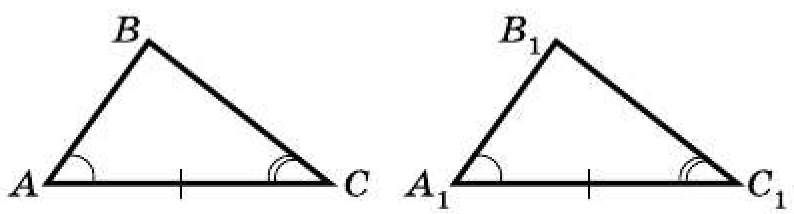
Оглавление

Первый признак равенства треугольников: по двум сторонам и углу между ними



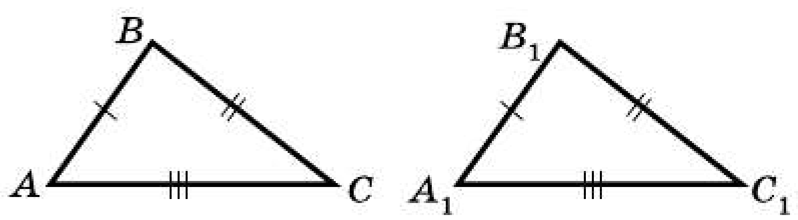
Если $AB = A_1B_1$,
$AC = A_1C_1$,
$\angle A = \angle A_1$,
то $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

Второй признак равенства треугольников: по стороне и прилежащей к ней углам



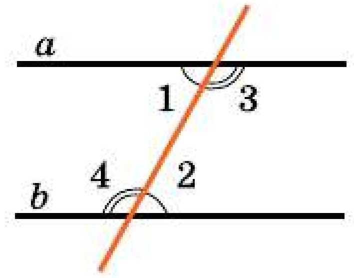
Если $AC = A_1C_1$,
$\angle A = \angle A_1$,
$\angle C = \angle C_1$,
то $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

Третий признак равенства треугольников: по трём сторонам

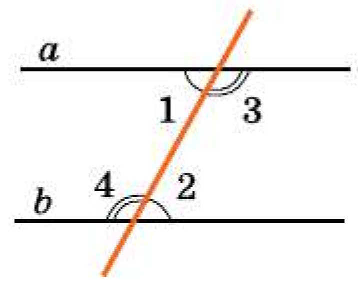


Если $AB = A_1B_1$,
$BC = B_1C_1$,
$AC = A_1C_1$,
то $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

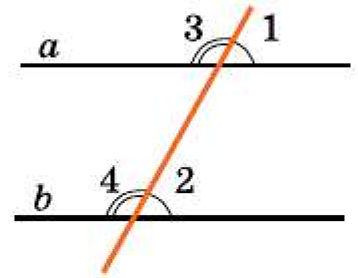
Признаки параллельности прямых



Если $\angle 1 = \angle 2$ ($\angle 3 = \angle 4$),
то $a \parallel b$

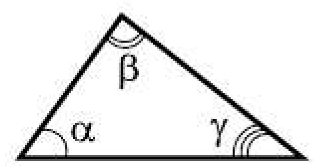


Если $\angle 1 + \angle 4 = 180^\circ$
($\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$),
то $a \parallel b$



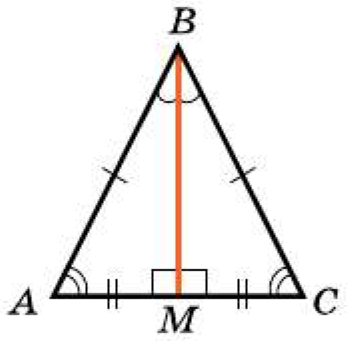
Если $\angle 1 = \angle 2$ ($\angle 3 = \angle 4$),
то $a \parallel b$

Сумма углов треугольника

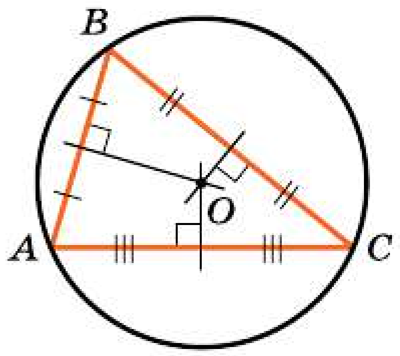


$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

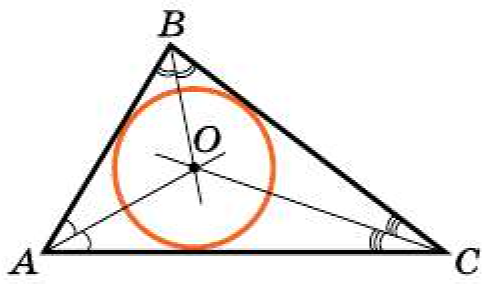
Свойства равнобедренного треугольника

	Если $AB = BC$, то $\angle A = \angle C$. Если $AB = BC$ и $AM = MC$, то $BM \perp AC$ и $\angle ABM = \angle CBM$. Если $AB = BC$ и $\angle ABM = \angle CBM$, то $BM \perp AC$ и $AM = MC$

Окружность, описанная около треугольника

	Центр O окружности — точка пересечения серединных перпендикуляров сторон треугольника

Окружность, вписанная в треугольник

	Центр O окружности — точка пересечения биссектрис углов треугольника

Латинский алфавит

Печатные буквы		Названия букв
A	a	а
B	b	бэ
C	c	цэ
D	d	дэ
E	e	е
F	f	эф
G	g	жэ
H	h	аш
I	i	и
J	j	жи
K	k	ка
L	l	эль
M	m	эм
N	n	эн
O	o	о
P	p	пэ
Q	q	ку
R	r	эр
S	s	эс
T	t	тэ
U	u	у
V	v	вэ
W	w	дубль-вэ
X	x	икс
Y	y	игрек
Z	z	зед

Греческий алфавит

Печатные буквы		Названия букв
Α	α	альфа
Β	β	бета
Γ	γ	гамма
Δ	δ	дельта
Ε	ε	эпсилон
Ζ	ζ	дзета
Η	η	эта
Θ	θ, ϑ	тета
Ι	ι	йота
Κ	κ	каппа
Λ	λ	лямбда
Μ	μ	мю
Ν	ν	ню
Ξ	ξ	кси
Ο	ο	омикрон
Π	π	пи
Ρ	ρ	ро
Σ	σ, ς	сигма
Τ	τ	тау
Υ	υ	ипсилон
Φ	φ, ϕ	фи
Χ	χ	хи
Ψ	ψ	пси
Ω	ω	омега